

INSTYTUT ŁĄCZNOŚCI

REFERATY
PROBLEMOWE

Zeszyt 13

Sławoj Walaszek

ZASTOSOWANIE UOGOLNIONEGO ROZWIĄZANIA
UKŁADU O TRZECH STANACH DO ANALIZY
NIEZAWODNOŚCI



Warszawa - styczeń 1979

621.3.019.3

INSTYTUT ŁĄCZNOŚCI

Na prawach rękopisu

REFERATY PROBLEMOWE

Zeszyt 13

Sławoj Walaszek

ZASTOSOWANIE UOGÓLNIIONEGO ROZWIĄZANIA UKŁADU
O TRZECH STANACH DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI

Warszawa - styczeń 1979

5-8445

BIBLIOTEKA
Instytutu Łączności
Nr. 5-8445

Opracował:

doc. dr inż. Sławoj Walaszek

Instytut Łączności - Oddział w Gdańsku /Z-24/

Gdańsk-Wrzeszcz, ul. Jaśkowa Dolina 8, tel. 417121

Uzupełnienie do pracy problemu węzłowego 19.06.Y.01.02

Opiniował: dr inż. Bohdan Butkiewicz

Maszynopis dostarczone dnia 23 grudnia 1978 r.

W pracy określono charakterystyki niezawodnościowe zespołu komutacyjnego, który może znajdować się w trzech stanach: wolny, zajęty obsługą zgłoszenia i uszkodzony. W celu rozwiązania zagadnienia wyprowadzono wzory dla ogólniejszego problemu, określonego tzw. grafem pełnym. Rozwiązanie dla badanego zespołu komutacyjnego jest przypadkiem szczególnym rozwiązania ogólnego. Wyprowadzone wzory ogólne można stosować do rozwiązywania innych zagadnień dotyczących różnych układów o trzech stanach.

Redaktor: J. Borkowska

Montaż tekstu: B. Drabik

Wpłynęło do Działu Wydawniczego Instytutu Łączności
dnia 7.01.1979 r.

Nakład 70 egz.

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Określenie zagadnienia	1
2. Rozwiązanie ogólne dla procesu o trzech stanach	4
3. Rozwiązanie zagadnienia	6
4. Zakończenie	10
Wykaz literatury	11

1. OKREŚLENIE ZAGADNIENIA

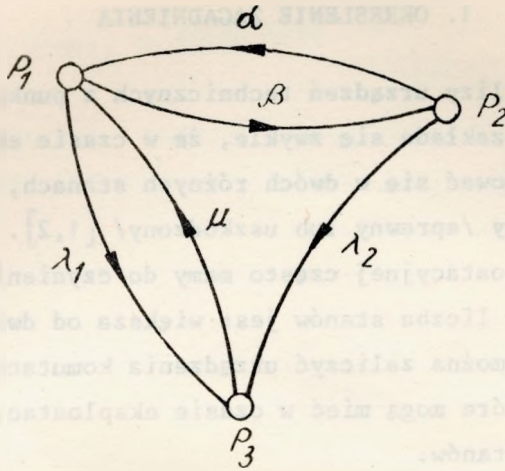
Podczas analizy urządzeń technicznych z punktu widzenia niezawodności zakłada się zwykle, że w czasie eksploatacji mogą one znajdować się w dwóch różnych stanach, zdalny i niezdalny do pracy /sprawny lub uszkodzony/ [1,2]. Jednak w praktyce eksploatacyjnej często mamy do czynienia z urządzeniami, których liczba stanów jest większa od dwóch. Do takich urządzeń można zaliczyć urządzenia komutacyjne złożone z zespołów, które mogą mieć w czasie eksploatacji trzy lub nawet więcej stanów.

W pracy tej ograniczymy się do przypadku pojedynczego zespołu komutacyjnego z odnową, który może znajdować się w trzech następujących stanach:

- stan P_1 ; zespół wolny i sprawny, ale nie obsługuje zgłoszenia;
- stan P_2 ; zespół zajęty obsługą zgłoszenia;
- stan P_3 ; zespół uszkodzony i wymaga naprawy/

Zakładamy, że proces zmian stanów zespołu spełnia warunki procesu Markowa i można go opisać za pomocą układu równań Kołmogorowa [3,6]. Dla zilustrowania zachowania się układu podczas eksploatacji na rys. 1 przedstawiono graf pracy równoważnego zespołu, który podaje poszczególne intensywności przejść od stanu do stanu.

Na początku rozważanego okresu / $t = 0$ / zespół znajduje się w stanie P_1 /sprawny i wolny/. Wówczas zespół może zmie-



Rys. 1. Graf rozważanego procesu

niać stan i przejść do stanu P_2 z intensywnością β /nadchodzi zgłoszenie do obsługi i układ przechodzi ze stanu "wolny" do stanu "zajęty"/ lub do stanu P_3 z intensywnością λ_1 /zespół w stanie "wolny" może zostać uszkodzony/.

Jeżeli zespół znajduje się w stanie P_2 /zajęty/, wówczas może przejść do stanu P_1 z intensywnością α /obsługa zgłoszenia została zakończona i zespół powraca do stanu "wolny"/ lub do stanu P_3 z intensywnością λ_2 /zespół w czasie obsługi zgłoszenia ulega uszkodzeniu/. Natomiast jeżeli zespół znajduje się w stanie P_3 , to może przejść tylko do stanu P_1 z intensywnością μ /zespół uszkodzony zostaje naprawiony i przechodzi w stan "wolny"/. Wszystkie procesy elementarne mają wykładnicze rozkłady prawdopodobieństwa odpowiednio o parametrach $\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2$ i μ .

Celem analizy jest określenie prawdopodobieństwa $P_1/t/$, $P_2/t/$ i $P_3/t/$ znajdowania się zespołu w stanach P_1, P_2 i P_3 .

Następnie należy zbadać zachowanie się zespołu w warunkach stacjonarnych oraz określić inne charakterystyki zespołu, takie jak niezawodność, wartości oczekiwane czasów przebywania w poszczególnych stanach oraz gęstość prawdopodobieństwa czasu pracy do pierwszego uszkodzenia. Przyjmujemy warunki początkowe $P_1/0/ = 1$, $P_2/0/ = P_3/0/ = 0$. Oczywiście $P_1/t/ + P_2/t/ + P_3/t/ = 1$.

W literaturze [3,4] można znaleźć przykłady analizy innych układów o trzech stanach, o układzie parametrów różnym niż rozważany tutaj. Metoda stosowana do rozwiązania postawionego problemu polega na ułożeniu układu równań Kołmogorowa, który dla rozważanego przypadku będzie miał postać:

$$P_1'/t/ = - (\beta + \lambda_1) P_1/t/ + \alpha P_2/t/ + \mu P_3/t/$$

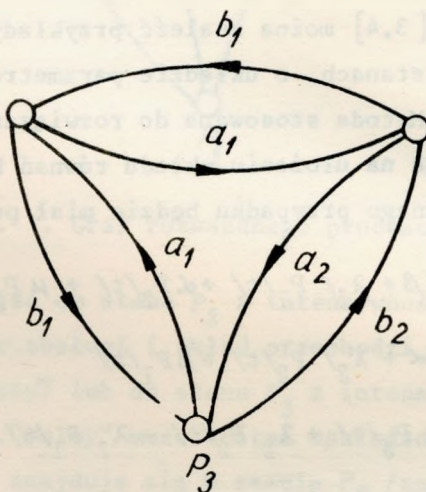
$$P_2'/t/ = - (\alpha + \lambda_2) P_2/t/ + \beta P_1/t/ \quad /1/$$

$$P_3'/t/ = - \mu P_3/t/ + \lambda_2 P_2/t/ + \lambda_1 P_1/t/.$$

Po uwzględnieniu warunków początkowych i zastosowaniu przekształcenia Laplace'a [5], otrzymuje się układ równań algebraicznych. Po ich rozwiązaniu i dokonaniu przekształcenia odwrotnego znajduje się poszukiwany wynik w postaci $P_1/t/$, $P_2/t/$ i $P_3/t/$. Taka metoda postępowania wymaga dla każdego indywidualnego przypadku wykonania szeregu pracochłonnych obliczeń.

Tutaj zostaje zaproponowana inna metoda postępowania podczas obliczania rozwiązania, polegająca na znalezieniu rozwiązania ogólnego dla grafu procesu ogólnego, nazwanego "grafem pełnym" /rys. 2/, uwzględniającego wszystkie możliwe

przejścia od stanu do stanu. Dowolne rozwiązanie szczegółowe można znaleźć przyjmując za równe zero odpowiednie parametry rozwiązania ogólnego, które nie występują w rozważanym zagadnieniu szczególnym. Rozwiązanie ogólne zostanie wykorzystane do rozwiązania sformułowanego powyżej zagadnienia.



Rys. 2. Graf pełny procesu o trzech stanach

2. ROZWIĄZANIE OGÓLNE DLA PROCESU O TRZECH STANACH

Na podstawie grafu pełnego /rys. 2/ procesu o trzech stanach, uwzględniającego wszystkie możliwe przejścia od stanu do stanu, można napisać układ równań Kołmogorowa w następującej postaci:

$$P_1/t/ = - /a_1+b_3/ P_1/t/ + b_1 P_2/t/ + a_3 P_3/t/,$$

$$P_2/t/ = - /a_2+b_1/P_2/t/ + a_1 P_1/t/ + b_2 P_3/t/, \quad /2/$$

$$P_3/t/ = - /b_2+a_3/ P_3/t/ + a_2 P_2/t/ + b_3 P_1/t/$$

Po uwzględnieniu warunków początkowych w postaci ogólnej $P_i/0/$; $i = 1,2,3$ i zastosowaniu przekształcenia Laplace'a [3,5] otrzymuje się rozwiązanie w postaci:

$$P_i/t/ = X_i + Y_i \exp /s_2 t/ + Z_i \exp /s_3 t/ \quad /3/$$

gdzie

$$X_i = \frac{M_i}{C}$$

$$Y_i = \frac{S_2^2 P_i/0/+S_2 [P_i/0/N_i+P_j/0/b_i+P_k/0/a_k] + M_i}{S_2 /S_2-S_3/} \quad /4/$$

$$Z_i = - \frac{S_3^2 P_i/0/+S_3 [P_i/0/N_i+P_j/0/b_i+P_k/0/a_k] + M_i}{/S_3 /S_2-S_3/}$$

oraz

$$M_i = a_j a_k + a_k b_i + b_i b_j$$

$$N_i = a_j + a_k + b_i + b_j \quad /5/$$

$$i, j, k = 1, 2, 3; \quad i \neq j \neq k$$

/U w a g a : i, j, k liczy się kolejno, tzn. dla $i = 1$, $i, j, k = 1, 2, 3$; dla $i = 2$; $i, j, k = 2, 3, 1$; i dla $i = 3$, $i, j, k = 3, 1, 2/$.

$$W \text{ powyższych wzorach } B = a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3,$$

$$C = a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3+a_1b_2+a_2b_3+a_3b_1+b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3,$$

$$s_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2}, \quad s_3 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4C}}{2} \quad /5a/$$

Przy obliczeniach można dodatkowo uwzględnić następujące zależności:

$$s_2 \cdot s_3 = C$$

$$s_2 - s_3 = \sqrt{B^2 - 4C}$$

$$s_2 + s_3 = -B$$

Podane powyżej ogólne rozwiązanie /3/, /4/, /5/ spełnia warunek $P_1/t/ + P_2/t/ + P_3/t/ = 1$.

3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Do rozwiązania zagadnienia sformułowanego na początku tej pracy wykorzystamy wzory rozwiązania ogólnego dla warunków początkowych $P_1/0/ = 1$, $P_2/0/ = P_3/0/ = 0$. Ponieważ z porównania grafów z rys. 1 i rys. 2 wynika, że $a_1 = \beta$, $a_2 = \lambda_2$, $a_3 = \mu$, $b_1 = \alpha$, $b_2 = 0$, $b_3 = \lambda_1$, więc $B = \beta + \lambda_2 + \lambda_1 + \alpha + \mu$,

$$C = \beta\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \beta\mu + \lambda_2\mu + \lambda_1\alpha + \alpha\mu = / \lambda_2 + \alpha / / \lambda_1 + \mu / + \beta / \lambda_2 + \mu /$$

oraz

$$s_{2,3} = \frac{1}{2} \left[/ \beta + \lambda_2 + \lambda_1 + \alpha + \mu / \pm \sqrt{ / \alpha + \lambda_2 - \beta - \lambda_1 - \mu / ^2 + 4\beta / \alpha - \mu / } \right]$$

przy czym oba pierwiastki są ujemne, ponieważ $B > 0$ i $C > 0$.

Dla s_3 jest to oczywiste, a dla s_2 z /5a/ mamy:

$$\begin{aligned} -B &> \sqrt{B^2 - 4C} \\ B^2 &> B^2 - 4C \\ 0 &> -4C \end{aligned}$$

co jest prawdziwe, bo $C > 0$. Informacja o znakach pierwiastków będzie dalej potrzebna przy całkowaniu.

Na podstawie wzorów /3-5/ otrzymuje się:

$$\begin{aligned} P_1/t/ &= \frac{\mu/\alpha + \lambda_2/}{2} + \frac{s_2^2 + s_2/\lambda_2 + \alpha + \mu/ + \mu/\alpha + \lambda_2/}{s_2 \sqrt{B^2 - 4C}} \exp/s_2 t/ - \\ &- \frac{s_3^2 + s_3/\lambda_2 + \alpha + \mu/ + \mu/\alpha + \lambda_2/}{s_3 \sqrt{B^2 - 4C}} \exp/s_3 t/, \quad /6/ \end{aligned}$$

$$P_2/t/ = \frac{\beta\mu}{C} + \frac{\beta/s_2 + \mu/}{s_2 \sqrt{B^2 - 4C}} \exp/s_2 t/ - \frac{\beta/s_3 + \mu/}{s_3 \sqrt{B^2 - 4C}} \exp/s_3 t/, \quad /7/$$

$$\begin{aligned} P_3/t/ &= \frac{\beta\lambda_2 + \lambda_1/\lambda_2 + \alpha/}{C} + \frac{\beta\lambda_2 + \lambda_1/s_2 + \lambda_2 + \alpha/}{s_2 \sqrt{B^2 - 4C}} \exp/s_2 t/ - \\ &- \frac{\beta\lambda_2 + \lambda_1/s_3 + \lambda_2 + \alpha/}{s_3 \sqrt{B^2 - 4C}} \exp/s_3 t/ \quad /8/ \end{aligned}$$

Dla warunków stacjonarnych / $t \rightarrow \infty$ / prawdopodobieństwa stacjonów będą:

$$\pi_1 = \frac{\mu(\alpha + \lambda_2)}{\lambda_2 + \alpha + \lambda_1 + \mu + \beta/\lambda_2 + \mu} \quad /9/$$

$$\pi_2 = \frac{\beta\mu}{\lambda_2 + \alpha + \lambda_1 + \mu + \beta/\lambda_2 + \mu} \quad /10/$$

$$\pi_3 = \frac{\beta\lambda_2 + \lambda_1/\lambda_2 + \alpha}{\lambda_2 + \alpha + \lambda_1 + \mu + \beta/\lambda_2 + \mu} \quad /11/$$

Ten sam wynik można otrzymać z rozwiązania układu równań dla warunków stacjonarnych /12/, napisanego na podstawie układu /2/:

$$/a_1 + a_3/\pi_1 = b_1\pi_2 + b_3\pi_3$$

$$/a_2 + b_1/\pi_2 = a_1\pi_1 + b_2\pi_3 \quad /12/$$

$$/b_2 + b_3/\pi_3 = a_2\pi_2 + a_3\pi_1$$

przy uwzględnieniu warunku $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ oraz przyjęciu $P_2'/\infty = 0$. Wzory /9-11/ wyrażają udział czasu przebywania zespołu w każdym z trzech stanów dla długiego czasu obserwacji.

W celu określenia niezawodności układu /funkcji niezawodności/ należy poddać go obserwacji aż do pierwszego uszkodzenia, czyli należy założyć $\mu = 0$ /nie ma napraw/.

Wówczas $B = \beta + \lambda_2 + \lambda_1 + \alpha$, $C = \beta\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\alpha$ oraz

$$s_{2,3} = \frac{1}{2} \left[-\beta + \lambda_2 + \lambda_1 + \alpha \pm \sqrt{(\alpha + \lambda_2 - \beta - \lambda_1)^2 + 4\alpha\beta} \right].$$

A więc

$$P_1/t, \mu = 0/ = \frac{1}{s_2 - s_3} \left[/s_2 + \lambda_2 + \alpha / \exp/s_2 t/ - /s_3 + \lambda_2 + \alpha / \exp/s_3 t/ \right], \quad /13/$$

$$P_2/t, \mu = 0/ = \frac{\beta}{s_2 - s_3} \left[\exp/s_2 t/ - \exp/s_3 t/ \right]. \quad /14/$$

$$P_3/t, \mu = 0/ = 1 + \frac{1}{s_2 - s_3} \left[/ \lambda_1 + s_3 / \exp/s_2 t/ - / \lambda_1 + s_2 / \exp/s_3 t/ \right] \quad /15/$$

Oczywiście w tym przypadku, gdy nie ma napraw, w warunkach stacjonarnych $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = 0$ i $\pi_3 = 1$, co wynika ze wzorów /13-15/ oraz /9-11/.

Funkcja niezawodności będzie mieć postać:

$$R/t/ = P_1/t, \mu = 0/ + P_2/t, \mu = 0/ = \frac{1}{s_2 - s_3} .$$

$$\cdot \left[/s_2 + \alpha + \beta + \lambda_2 / \exp/s_2 t/ - /s_3 + \alpha + \beta + \lambda_2 / \exp/s_3 t/ \right]. \quad /16/$$

Wartość oczekiwana czasu przebywania w stanie sprawnym /"wolny" lub "zajęty"/ będzie:

$$E/L/ = \int_0^{\infty} R/t/dt = \frac{\alpha + \beta + \lambda_2}{\lambda_2 \beta + \lambda_1 / \lambda_2 + \alpha} \quad /17/$$

Gęstość prawdopodobieństwa czasu do uszkodzenia:

$$f/t/ = P^o/t/ = \frac{d}{dt} [/1 - R/t/] = P_3/t, \mu = 0/ = \quad /18/$$

$$= \frac{\lambda_2 + \beta + \lambda_1 / \lambda_2 + \alpha}{s_2 - s_3} \left[/ \frac{\lambda_1}{s_3} + 1 / \exp /s_2 t/ - / \frac{\lambda_1}{s_2} + 1 / \exp/s_3 t/ \right].$$

Wartość oczekiwana czasu przebywania w stanie P_1 :

$$E/P_1/ = \int_0^{\infty} P_1/t, \mu = 0/dt = \frac{\alpha + \lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1/\lambda_2 + \alpha} \quad /19/$$

Wartość oczekiwana czasu przebywania w stanie P_2 :

$$E/P_2/ = \int_0^{\infty} P_2/t, \mu = 0/dt = \frac{\beta}{\lambda_2 + \lambda_1/\lambda_2 + \alpha} \quad /20/$$

Wartość oczekiwana czasu przebywania w stanie P_3 /bez napraw/:

$$E/P_3/ = \int_0^{\infty} P_3/t, \mu = 0/dt = \infty.$$

W ten sposób zostały określone charakterystyki niezawodnościowe omówionego na początku zespołu komutacyjnego, a więc zagadnienie postawione w punkcie 1 zostało rozwiązane.

4. ZAKOŃCZENIE

W pracy określono charakterystyki niezawodnościowe zespołu komutacyjnego, który może znajdować się w trzech stanach: wolny, zajęty obsługą zgłoszenia i uszkodzony.

W celu rozwiązania postawionego zagadnienia opracowano wzory ogólne dla układów o trzech stanach, wynikające z grafu pełnego /rys. 2/. Założono, że wszystkie procesy elementarne zachodzące w układzie są niezależne i charakteryzują się rozkładami wykładniczymi, a więc mamy do czynienia z procesem Markowa, który można opisać za pomocą układu równań Kołmogorowa [2].

Wyprowadzone wzory ogólne można stosować do rozwiązywania innych zagadnień dotyczących układów o trzech stanach, przy-

ując za równe zero te parametry rozwiązania ogólnego, które nie występują w rozważanym zagadnieniu szczegółowym. Przedstawiona metoda postępowania znacznie upraszcza obliczenia niezbędne do uzyskania rozwiązania.

WYKAZ LITERATURY

BIBLIOTEKA
Instytutu Łączności
Nr 5-8445

1. M. Sztarski. Niezawodność i eksploatacja urządzeń elektronicznych, WKŁ, Warszawa 1972.
2. B.W. Gniedenko i in.: Metody matematyczne w teorii niezawodności, WNT, Warszawa 1968.
3. U. Narayan Bhat. Elements of Applied Stochastic Processes, Wyd. J. Wiley 1972.
4. Pourth Congress of the International Federation of Automatic Control, Warszawa 16-21 June 1969. Performance Diagnostic und Reliability.
5. G. Doetsch. Praktyka przekształcenia Laplace'a. PWN, Warszawa 1964.
6. G.W. Drużinin. Nadieżność swtomatizirowanych sistem, Moskwa, Energia 1977.

D o t y c z a s u k a z a ły s i e :

1. Biało-brzeski R., Sońta S.: Zastosowanie testu chi kwadrat Pearsona do weryfikacji hipotezy statystycznej na podstawie empirycznej gęstości prawdopodobieństwa. Grudzień 1977.
2. Blinkiewicz A., Mędrzycki B., Hutnik M., Sambierski R.: Zastosowanie pamięci kasetowej PK-1 do rejestracji danych w systemie komutacyjnym E-10. Styczeń 1978.
3. Orłowski A.: Optymalizacja układu ogranicznika dynamiki zwłaszcza dla radiofonii krótkofalowej. Luty 1978.
4. Frączek K.: Zasady opracowywania wymagań techniczno-eksploatacyjnych na urządzenia pomiarowe w resorcie łączności. Marzec 1978.
5. Biało-brzeski R., Dudziewicz J.: Minimalna częstość próbkowania sygnału losowego przy pomiarze jego mocy średniej. Marzec 1978.
6. Lewandowski W.: Wprowadzenie komutacji teledacyjnych kanałów cyfrowych w powszechnej telefonicznej sieci komutacyjnej z centralami elektronicznymi E-10. Kwiecień 1978.
7. Dudziewicz J.: Ogólne wytyczne w sprawie prowadzenia i dokumentowania prac naukowo-badawczych wykonywanych w Instytucie Łączności. Kwiecień 1978.
8. Stagrowski A.: Metoda detekcji i pomiaru impulsów o maksymalnych i minimalnych czasach trwania w ciągu. Maj 1978.

9. Chamski J.: System CTI-B dla maszyny cyfrowej R-10. Maj 1972.
10. Puchalski E.: Kompensator napięcia stałego stosowany w układach do sprawdzania przetworników termoelektrycznych i mikropotencjometrów. Czerwiec 1978.
11. Kozłowski A.: Elektroniczny sygnalizator przywołania abonenta w aparacie telefonicznym CB. Wrzesień 1978.
12. Stasiński L.: Wyładowania łukowe w cz. na izolatorach odciągów pionowych anten radiofonicznych. Październik 1978.

Biblioteka

IL

S-8445