

**BIULETYN**  
**INFORMACYJNY**  
**INSTYTUTU**  
**ŁĄCZNOŚCI**

BIBLIOTEKA  
Instytutu Łączności  
Nr. \_\_\_\_\_



**1995**  

---

**1**



BIBLIOTEKA  
Instytutu Łączności  
Nr \_\_\_\_\_

**BIULETYN  
INFORMACYJNY  
INSTYTUTU  
ŁĄCZNOŚCI**

ROK 35

INSTYTUT ŁĄCZNOŚCI

NR 1(326)

---

WARSZAWA 1995

**Komitet Redakcyjny**

**Redaktor Naczelny: dr inż. Krystyn Plewko**

**Z-ca Redaktora Naczelnego: doc. dr inż. Alina Karwowska-Lamparska**

**Redaktorzy Działowi:**

**doc. dr inż. Włodzimierz Barjasz**

**dr inż. Stanisław Sońta**

**inż. Maria Łopuszniak**

© Copyright by Instytut Łączności, Warszawa 1995

ISSN 0209-1046

**Redaktor: mgr Krystyna Juskiewicz**

**Skład komputerowy: techn. Grażyna Woźnica**

---

**Instytut Łączności, Dział Ogólnotechniczny**  
**ul. Szachowa 1, 04-894 Warszawa**

Jerzy Dudziewicz

## OCENA NIEPEWNOŚCI WYNIKU POMIARU

### SPIS TREŚCI

	Str.
1. Wstęp	5
2. Zagadnienia ogólne	6
3. Ogólne koncepcje analizy niepewności	12
4. Prawo propagacji niepewności	14
5. Praktyczne wskazówki dotyczące oceny niepewności wyniku pomiaru	16
6. Przykłady oceny niepewności wyniku pomiaru	21
7. Schemat procedury wyznaczania niepewności wyniku pomiaru	33
Wykaz literatury	34



## OCENA NIEPEWNOŚCI WYNIKU POMIARU

### 1. WSTĘP

W sierpniu 1977 roku podczas kolejnej sesji CIPM (*Comité International des Poids et Mesures* - Międzynarodowy Komitet Miar) została utworzona grupa robocza, która miała za zadanie studiowanie problemów dotyczących oceny i wyrażania niepewności wyników pomiarów<sup>\*)</sup>. Po czteroletniej pracy tej grupy opracowano zalecenie INC-1 (1980), które zostało przyjęte przez CIPM jako zalecenie 1 (CI-1981), przy zaznaczeniu, że to zalecenie może stanowić podstawę dla ewentualnego uzgodnienia i powinno być poddane próbie w praktyce. W 1986 roku utworzono Grupę Roboczą Międzynarodowej Organizacji Normalizacyjnej (ISO), która wraz z OIML (*Organisation Internationale de Métrologie Légale* - Międzynarodowa Organizacja Metrologii Prawnej), IEC (*International Electrotechnical Commission* - Międzynarodowa Komisja Elektrotechniczna) oraz CIPM podjęła się opracowania i opublikowania wytycznych do praktycznego ich stosowania.

Owocem tych prac jest wydany w 1993 roku dokument ISO pt.: "*Guide to Expression of Uncertainty in Measurement*" (Przewodnik do wyrażania niepewności pomiaru) [7]. Jest to dość obszerne dzieło, zawierające 109 dwukolumnowych stron, w którym oprócz wstępów podano: podstawowe definicje, główne koncepcje, ocenę niepewności standardowej, wyznaczenie łącznej niepewności standardowej oraz

---

<sup>\*)</sup> Autor odsyła czytelników do dwóch poprzednich atrykułów wydanych w Biuletynie Informacyjnym Instytutu Łączności w latach 1984, 1990 i 1992: "Określenia i oceny niepewności pomiaru w świetle praktyki wielkich ośrodków metrologicznych", BI IŁ, nr 1-2 (223-224), 1984 [4]; "Niepewności wyników pomiaru" BI IŁ, nr 11-12 (285-286), 1990 [3] oraz "Praktyczna ocena niepewności pomiaru" BI IŁ, nr 10(303), 1992 [5].

podsumowanie całej procedury dotyczącej oceny i wyrażania niepewności wyniku pomiaru. Do dokumentu dołączono cały szereg aneksów, w których przedstawiono teksty oficjalnych zaleceń CIPM wraz z ich motywacją, glosariusz zawierający podstawowe terminy i definicje dotyczące głównych pojęć metrologicznych oraz statystycznych, praktyczne wskazówki wyznaczania niepewności wyników pomiaru, a także liczne przykłady obliczeniowe.

Autor proponuje, aby do czasu polskiego wydania tego Przewodnika można było posługiwać się skróconym materiałem o charakterze "szkoleniowym", który zaprezentowano w niniejszym artykule.

## 2. ZAGADNIENIA OGÓLNE

Każdy wynik pomiaru jest obarczony pewną niedokładnością, tzn. istnieje **niepewność** co do jego rzetelności, ścisłości, poprawności. Znane są na ogół czynniki, które powodują "fałszowanie" wyniku pomiaru. Zanim dokonamy pewnej systematyki tych czynników i przedstawimy procedury przeprowadzania takich analiz oraz odpowiednich rachunków, rozpatrzmy pewne przykłady praktyczne, które pozwolą nam zbliżyć się do tego delikatnego zagadnienia, mającego fundamentalne znaczenie dla praktyki i teorii mierzenia.

### Przykład 1

Zadanie ma polegać na pomiarze długości pewnego przedmiotu sztywnego, którego długość wynosi około 2 metrów. Typowym narzędziem pomiarowym, jakiego użyjemy w tym przypadku, będzie taśma stalowa z naniesioną na niej podziałką, tzw. przymiar kreskowy. Jak wiadomo, takiego pomiaru dokonujemy w ten sposób, że przykładamy przymiar do przedmiotu, tak aby początek tego przymiaru, a więc miejsce, w którym znajduje się kreska początkowa oznaczona wskazem 0, przypadł możliwie dokładnie na jeden kraniec przedmiotu i aby przy drugim krańcu tego przedmiotu można było



wyznaczyć na podziałce przymiaru odpowiadającą temu krańcowi kreskę oraz przyporządkować jej odpowiednią liczbę, która ma wyrażać wartość odpowiadającej odległości między kreską początkową (zerową) a daną kreską. Załóżmy, że wynik pomiaru wynosił na przykład 2047 mm. Zachodzi teraz pytanie, jaki jest stopień ufności co do poprawności tego wyniku pomiaru. Innymi słowy, jaka jest pewność - a raczej niepewność - że ten wynik pomiarowy jest poprawny.

Spróbujmy wymienić kilka czynników, które mogły mieć wpływ na to, że wynik pomiaru nie jest w pełni wiarygodny. Jako pierwszy można podać niedokładność przykładania przymiaru do przedmiotu i odczytywania odpowiedniej kreski. Jako dalszy czynnik można wymienić możliwość, że kraniec przedmiotu przypada akurat między kreskami, co wymagałoby dodatkowej interpolacji i dysponowania szkłem powiększającym (lupą), znajdującym się nad miejscem odczytu długości. Kolejnym czynnikiem może być niedokładność wykonania samego przymiaru, a w szczególności jego podziałki, zbyt grubych kresek itd. Jako dalszy czynnik można podać zmianę długości samego przymiaru ze względu na to, że temperatura, przy której była naniesiona podziałka, może się różnić od temperatury, przy której wykonujemy pomiar.

Już tych kilka czynników wyliczonych powyżej wskazuje na to, że rzeczywista - a raczej poprawna - wartość długości badanego przedmiotu może różnić się od otrzymanego wyniku pomiaru 2047 mm. W praktyce najczęściej zadawałamy się, jeżeli można wynik pomiaru uzupełnić pewnym **przedziałem niepewności**, tzn. podać przedział wartości, w którym może znaleźć się wartość mierzona. W danym przypadku może to przedstawiać się na przykład następująco: długość przedmiotu wynosi  $2047 \pm 3$  mm, co oznacza, że "bardzo prawdopodobna" wartość pomiaru zawiera się w przedziale 2044 - 2050 mm. Innymi słowy mówimy, że niepewność bezwzględna wyniku pomiaru wynosi w tym przypadku  $\pm 3$  mm lub też, że niepewność względna równa się  $\pm 3/2047 = \pm 1,5 \cdot 10^{-3} \hat{=} \pm 0,15\%$ .

## Przykład 2

Zmierzono napięcie stałe panujące między pewnymi dwoma węzłami układu elektrycznego prądu stałego za pomocą woltomierza cyfrowego i uzyskano wynik pomiaru 2,164 V. Jak wiadomo, taka procedura pomiarowa polega na dołączeniu za pomocą przewodów końcówek woltomierza do obiektu mierzonego (w danym przypadku do dwóch węzłów sieci elektrycznej) i dokonaniu bezpośredniego odczytu na cyfrowym urządzeniu wskazującym tego woltomierza. Istota zagadnienia polega na tym, aby wyszczególnić główne możliwe źródła niedokładności takiego pomiaru. Jedno z głównych wymagań dotyczących poprawności przeprowadzenia pomiaru polega na tym, aby dołączenie przyrządu pomiarowego do mierzonego obiektu nie wywoływało żadnego wpływu na ten obiekt, tzn. na jego stan. W danym przypadku chodzi konkretnie o to, aby dołączenie woltomierza do układu elektrycznego nie zmieniło napięcia mierzonego. Wpływ ten będzie pomijalnie mały, jeżeli opór (rezystancja) elektryczny wejścia woltomierza będzie bardzo wielki względem oporu zastępczego źródła, jaki stanowi badany układ elektryczny rozpatrywany z punktu widzenia dwóch jego węzłów. Jeżeli ten wpływ nie byłby do pominięcia (co na ogół nie będzie miało miejsca, ze względu na stosowanie elektronicznego woltomierza cyfrowego, który odznacza się zawsze wielkim oporem wejściowym, np. 10 M $\Omega$  albo nawet 1 G $\Omega$ ), to należałoby wprowadzić odpowiednią poprawkę, tzn. wartość, którą należy dodać do wyniku pomiaru, aby wyeliminować systematyczny wpływ tego czynnika.

Dalszym czynnikiem wpływającym na dokładność wyniku pomiarowego jest niepewność wskazań samego woltomierza cyfrowego. Dane takie są przeważnie zawarte w specyfikacji technicznej woltomierza i są formułowane na przykład w postaci następującej:

niepewność pomiaru:  $\pm$ (% od wskazania + liczba kwantów  
wskazania)

I tak np., jeżeli w danych katalogowych będzie podana niepewność wskazań dla zakresu 10 V (a taki zostanie wybrany - automatycznie lub ręcznie - zakres pomiaru przy napięciu mierzonym około 2 V), np.  $\pm(0,15\% + 4)$ , to wynika stąd, że wynik pomiaru 2,164 V będzie obarczony niepewnością bezwzględną  $\pm(1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2,164 + 0,004) = \pm(3,2 + 4) \cdot 10^{-3} \text{ V} = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 7,2 \text{ mV}$ ; odpowiednia niepewność względna wyniesie więc  $7,2 : 2\,164 = 3,3 \cdot 10^{-3} \hat{=} 0,33\%$ .

Dalszym czynnikiem, ograniczającym dokładność wskazań woltomierza cyfrowego, może być temperatura otoczenia oraz czas, jaki upłynął od ostatniej kalibracji, po której przyrząd spełniał ww. warunki dotyczące niepewności wskazań. Wszystko to może mieć dodatkowy wpływ powodujący, że niepewność wyniku pomiaru będzie większa.

### Przykład 3

Jako następny przykład rozważymy pomiar pośredni oporu  $R_x$  za pomocą mostka Wheatstone'a (por. rys. 1). Nazwano ten pomiar pośrednim, ponieważ wynik pomiaru uzyskuje się w sposób pośredni, a mianowicie (jak wynika z teorii czteroramiennego mostka Wheatstone'a) rezystancję mierzoną  $R_x = R_1$  można wyznaczyć ze wzoru:

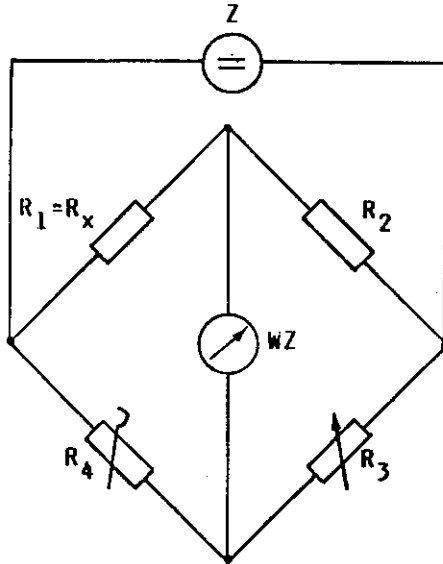
$$R_x = \frac{R_2 R_4}{R_3} \quad (1)$$

gdzie:

$R_2$  - rezystancja stała,

$R_3$  - rezystancja zmienna w sposób ciągły (lub w bardzo drobnych kwantach)

$R_4$  - rezystancja zmienna skokowo.



Rys. 1. Układ mostka Wheatstone'a  
 $R_1, R_2, R_3$  i  $R_4$  - rezystancje,  $WZ$  - wskaźnik zera,  
 $Z$  - źródło prądu stałego

Tak więc wynik pomiaru rezystancji  $R_x$  uzyskuje się po doprowadzeniu mostka do stanu równowagi (za pomocą regulacji rezystancji  $R_3$  i po nastawieniu odpowiedniej wartości rezystancji  $R_4$ ), co można stwierdzić po zaniku prądu we wskaźniku zera  $WZ$ . Wtedy należy podstawić odpowiednie wartości  $R_2, R_3$  i  $R_4$  we wzorze (1) i wyznaczyć szukaną (mierzoną) wartość rezystancji  $R_x$ .

W tym przypadku niepewność wyniku pomiaru rezystancji  $R_x$  będzie zależna od niepewności wyznaczenia trzech wyżej wymienionych rezystancji, od reszkowych rezystancji doprowadzeń (przewodów), a także od "precyzji uchwycenia" momentu równowagi mostka, tzn. od czułości wskaźnika zera, i trafności jego uchwycenia przez eksperymentatora oraz precyzji regulacji (chodzi tu o dużą zdolność rozdzielczą rezystancji regulowanej  $R_3$ ).

Jak wynika z tego przykładu, niepewności pomiaru (lub wyznaczenia) rezystancji  $R_2$ ,  $R_3$  i  $R_4$  wpływają w pewien sposób na niepewność wyniku pomiaru rezystancji  $R_x$ ; ważna jest więc znajomość pewnego ogólnego **prawa propagacji niepewności** pomiaru pośredniego, tak aby można było postępować w sposób konsekwentny i jednolity niezależnie od postaci funkcyjnej, wiążącej wielkość pomiarową mierzoną w sposób pośredni z wielkościami mierzonymi bezpośrednio (w niniejszym przykładzie dotyczyło to zależności funkcyjnej wyrażonej wzorem 1).

Z tych kilku zaledwie przykładów wynika w sposób oczywisty, jak skomplikowane i różnorodne mogą być sposoby analizy oraz rachunku dotyczące oszacowania niepewności wyniku pomiaru. Należy podkreślić z całą mocą, że wynik pomiaru, któremu nie potrafimy przyporządkować niepewności, jest bezwartościowy. Z drugiej strony trzeba stwierdzić, że taka analiza należy do bardzo trudnych i delikatnych procesów związanych z mierzaniem, lecz jakoś jej wykonania świadczy w głównej mierze o jakości przeprowadzenia całego eksperymentu pomiarowego. Im wyższy ma być poziom prac metrologicznych, tym bardziej subtelny musi być aparat analizy błędów. Oddzielny problem stanowi składanie - sumowanie - niepewności cząstkowych, pochodzących od różnych przyczyn, czyli to, co nazywamy oszacowaniem niepewności globalnej (łącznie, wynikowej, całkowitej). Zaleca się, aby w dokumentacji pomiaru podawać cały bilans niepewności i sposób wyznaczania niepewności globalnej; w szczególności dotyczy to prac kalibracyjnych, a więc uwierzytelniania etalonów, których sposób dalszego wykorzystania nie może być z góry przewidziany. Dlatego też lepiej, aby przyszły użytkownik takich narzędzi pomiarowych mógł - w zależności od potrzeby - wykorzystać różne dane cząstkowe dotyczące niepewności pomiaru i pewnych współczynników pokrycia stosowanych często przy szacowaniu niepewności globalnej.

### 3. OGÓLNE KONCEPCJE ANALIZY NIEPEWNOŚCI

Jak już wspomniano powyżej, niepewność pomiaru jest oszacowaniem tej części wyniku pomiaru, która dotyczy przedziału wartości, w obrębie którego znajduje się - z dostatecznie dużym prawdopodobieństwem - poprawna wartość mierzonej wielkości.

Zanim przystąpimy do dalszej analizy, uczynimy pewną uwagę dotyczącą tradycyjnego sposobu ujmowania tego zagadnienia w dotychczasowej praktyce metrologicznej [3, 4]. Przede wszystkim dawniej nie stosowano w tym znaczeniu pojęcia "niepewności pomiaru", lecz pojęcie "błędu pomiaru" rozumiejąc przez to niezgodność wyniku pomiaru z wartością wielkości mierzonej [11] i rozróżniano dwa typy takich błędów, a mianowicie: **błędy systematyczne** i **błędy przypadkowe**. Przez błąd systematyczny rozumiano błąd, który przy wielu pomiarach tej samej wartości pewnej wielkości, wykonanych w tych samych warunkach, pozostaje stały, zarówno co do wartości bezwzględnej jak i co do znaku, lub zmienia się według określonego prawa wraz ze zmianą warunków. Błąd przypadkowy natomiast to błąd zmieniający się w sposób nieprzewidziany zarówno co do wartości bezwzględnej, jak i co do znaku, przy wykonywaniu dużej liczby pomiarów tej samej wartości pewnej wielkości w warunkach praktycznie niezmiennych.

W 1980 roku przedstawiono Międzynarodowemu Komitetowi Miar nową propozycję dotyczącą wyrażania niepewności wyniku pomiaru, która została przyjęta przez Komitet w 1981 roku. Ze względu na wagę sprawy przytacza się jej tekst in extenso.

*"1. Niepewność wyniku pomiaru zawiera na ogół wiele składników, które można podzielić na dwie kategorie w zależności od metody stosowanej do oszacowania ich wartości liczbowej:*

*A) takie, które wyznacza się za pomocą metod statystycznych;*

*B) takie, które wyznacza się za pomocą innych metod.*

Nie zawsze istnieje prosta odpowiedniość między podziałem na kategorie A lub B i podziałem na charakter "przypadkowy" lub "systematyczny", stosowany dawniej do klasyfikacji niepewności. Wyrażanie "niepewność systematyczna" może prowadzić do mylnej interpretacji; należy go unikać.

Każdy szczegółowy opis niepewności powinien zawierać kompletny spis składników i wskazywać dla każdego z nich metodę stosowaną przy przypisywaniu im wartości liczbowej.

2. Składniki kategorii A charakteryzują się wariancjami eksperymentalnymi (w próbce)  $s_i^2$  lub odchyleniami standardowymi eksperymentalnymi (w próbce)  $s_i$  i liczbami  $\nu_i$  stopni swobody. W pewnych przypadkach należy podawać kowariancje eksperymentalne (w próbce).
3. Składniki kategorii B należy charakteryzować za pomocą wyrazów  $u_j^2$ , które można traktować jako przybliżenia odpowiednich wariancji, co do których zakłada się, że istnieją. Wyrazy  $u_j^2$  można uważać za wariancje, a wyrazy  $u_j$  - za odchylenia standardowe. W pewnych przypadkach kowariancje należy traktować w sposób analogiczny.
4. Niepewność łączną należy charakteryzować wartością uzyskaną przez zastosowanie zwykłej metody składania wariancji. Niepewność łączną, jak również jej składniki, należy wyrażać w postaci odchyień standardowych.
5. Jeżeli w szczególnych zastosowaniach należy pomnożyć przez pewien czynnik niepewność łączną chcąc uzyskać niepewność globalną, to powinno się zawsze podawać wartość liczbową tego czynnika".

Tak więc reasumując można powiedzieć, że wartość poprawną wyniku pomiaru uzyskuje się przez dodanie do "surowego" wyniku pomiaru wszystkich poprawek ujmujących wszystkie znane lub wyznaczone systematyczne odchylenia ("błędy"). Natomiast niepewność

tej wartości poprawnej należy charakteryzować za pomocą odpowiednich odchyleń standardowych, jak to podano w ww. tekście zalecenia Międzynarodowego Komitetu Miar.

#### 4. PRAWO PROPAGACJI NIEPEWNOŚCI

Rozpatrzmy teraz ogólne prawo wiążące niewielkie przyrosty (odchylenia, niepewności) zmiennej wielkości wyjściowej - wynikowej  $Y$  z przyrostami różnych innych wielkości fizycznych wejściowych  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Załóżmy więc, że istnieje funkcja  $G$  taka, że:

$$Y = G(X_1, X_2, \dots, X_1, \dots, X_n), \quad (2)$$

gdzie do wielkości wejściowych  $X_i$  można zaliczyć dane pomiarowe, dotyczące zarówno pomiaru bezpośredniego jak i pośredniego, dane zaznaczone w certyfikatach kalibracyjnych oraz dotyczących zastosowanych w danym pomiarze etalonów, wielkości wpływających (np. temperatury), poprawek itp. Chodzi teraz o to, jak "przenosi się" niepewność (małe wahania) wyznaczenia poszczególnej wielkości wejściowej na wielkość wyjściową, tzn. na wartość wielkości mierzonej (wynikowej).

Rozwijając funkcję (2) w szereg Taylora (w otoczeniu punktu  $X_i = 0$ ) uzyskamy:

$$\Delta Y \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial X_i} \Delta X_i, \quad (3)$$

gdzie dla uproszczenia pominięto wyrazy wyższych rzędów ze względu na to, że interesują nas w tym przypadku tylko niewielkie przyrosty zmiennych wejściowych  $\Delta X_i$ . Podnosząc obie strony równania (3) do kwadratu i pomijając także wyrazy wyższych rzędów uzyskamy:



$$(\Delta Y)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial G}{\partial X_i} \Delta X_i \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial G}{\partial X_i} \Delta X_i \right) \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left( \frac{\partial G}{\partial X_j} \Delta X_j \right) \quad (4)$$

Należy sobie uprzytomnić, że wszystkie zmienne w tych rachunkach, tzn.  $\Delta Y$  oraz  $\Delta X_i$ , są **zmiennymi losowymi**, reprezentującymi wahania (fluktuacje) wielkości fizycznych, które utożsamiamy w tej analizie z niepewnościami (zwanymi dawniej błędami przypadkowymi). Biorąc zamiast kwadratów powyższych zmiennych losowych ich wartości średnie otrzymamy zamiast równania (4):

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial G}{\partial X_i} \right)^2 \sigma_{xi}^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\partial G}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial G}{\partial X_j} \sigma_{x,ij}, \quad (5)$$

gdzie poszczególna wartość oczekiwania równa się<sup>\*)</sup>:

$$E[\Delta Y]^2 = \sigma_y^2, \quad (6)$$

tzn. równa jest wariancji zmiennej losowej  $\Delta Y$  oraz

$$E[\Delta X_i]^2 = \sigma_{xi}^2, \quad (7)$$

czyli równa się wariancji zmiennej losowej  $\Delta X_i$  i wreszcie

$$E[\Delta X_i \cdot \Delta X_j] = \sigma_{x,ij} = \sigma_{x,ji}, \quad (8)$$

a więc równa się kowariancji dwuwymiarowej zmiennej losowej  $(\Delta X_i, \Delta X_j)$ .

---

<sup>\*)</sup> Zakłada się, że wartości oczekiwane samych zmiennych losowych są równe zero, tzn. że  $E[\Delta X_i] = 0$  i  $E[\Delta Y] = 0$ .

Dla większości przypadków praktycznych będziemy musieli zastępować rzeczywiste wariancje i kowariancje ich nieobciążonymi estymatorami w próbkce, oznaczanymi dalej symbolami  $s$ . Tak więc zamiast wzoru (5) będziemy w praktyce stosowali następujący wzór:

$$s_y^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial G}{\partial X_i} \right)^2 s_{xi}^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{\partial G}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial G}{\partial X_j} s_{x,ij}, \quad (9)$$

Zakładając, że mamy do czynienia z próbką  $m$ -elementową, to znaczy że dla wielkości  $X_i$  uzyskujemy  $v_i = m$  wyników pomiarowych<sup>\*)</sup> (pomiaru powtarzane)  $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}$ , i podobnie dla  $X_j$  mamy  $v_j = m$  wyników  $x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jm}$ , można takie estymatory wyznaczać według następujących wzorów:

$$s_{xi}^2 = \frac{1}{m-1} \left[ \sum_{k=1}^m \left( x_{ik} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_{ik} \right)^2 \right] \quad (10)$$

oraz ( $i \neq j$ )

$$s_{x,ij} = \frac{1}{m-1} \left[ \sum_{k=1}^m \left( x_{ik} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_{ik} \right) \left( x_{jk} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_{jk} \right) \right] \quad (11)$$

## 5. PRAKTYCZNE WSKAZÓWKI DOTYCZĄCE OCENY NIEPEWNOŚCI WYNIKU POMIARU

Chcąc uzyskać bardziej wiarygodny wynik pomiaru należy przeprowadzić pomiary wielokrotne tej samej wielkości bezpośrednio mierzonej. W ten sposób przy  $m$  niezależnych pojedynczych pomiarach estymator  $x_i$  poprawnej wielkości  $X_i$  wyraża się przez war-

---

<sup>\*)</sup>  $v$  jest symbolem liczby stopni swobody (por. pkt 3).

tość średnią arytmetyczną poszczególnych wartości pomiarowych  $x_{ik} (k = 1, 2, \dots, m)$ :

$$x_i = \bar{x}_{ik} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_{ik} \quad (12)$$

Z podstaw statystyki matematycznej wiadomo, że odchylenie standardowe **pojedynczego pomiaru** można estymować pierwiastkiem z wariancji z próby  $s_{xi}$  wykorzystując wzór (10), natomiast odchylenie standardowe **średniej arytmetycznej**  $x_i$  (także zmiennej losowej!) można estymować wyrażeniem:

$$s_{\bar{x}_{ik}} = \frac{s_{xi}}{\sqrt{m}} \quad (13a)$$

W podobny sposób dla kowariancji dwuwymiarowej zmiennej losowej  $(\bar{x}_{ik}, \bar{x}_{jk})$ , z których każda stanowi wartość średnią, otrzymamy:

$$\text{Cov}(\bar{x}_{ik}, \bar{x}_{jk}) = s_{\bar{x}_{i,j}} = \frac{s_{x,i,j}}{m} \quad (13b)$$

Jeżeli próbka jest o małej liczebności (np.  $m < 10$ ), to należy wyrażenia (13) pomnożyć przez współczynnik podany w tablicy 1. Współczynniki obowiązują dla poziomu ufności 0,9545 (przedział dwusigmowy dla rozkładu normalnego) i są oparte na rozkładach normalnych i  $t$  - Studenta.

W przypadku gdy mamy do czynienia z pomiarem pośrednim, zaleca się dokonywać pomiary powtarzane dla każdej wielkości  $X_i$ , obliczać dla każdej z nich wartość średnią wg wzoru (12) i wyznaczać wartość średnią wielkości wynikowej  $Y$  (por. wzór 2), podstawiając we wzorze (2) zamiast każdej wielkości  $X_i$  jej estymator wyznaczony wg wzoru (12). W podobny sposób należy czynić z oceną

niepewności pomiaru, wyznaczając wg wzoru (13) estymator odchylenia standardowego średniej arytmetycznej (po ewentualnym wymnożeniu przez odpowiedni współczynnik przy pomiarach o małej liczebności) i stosując wzór (9) dla oceny niepewności (wariancji) wyniku pomiaru wielkości  $Y$ .

Tablica 1

Wartości współczynnika korekcyjnego wynikającego z małej liczebności próbki

Liczebność próbki $m$	Współczynnik
2	7,0
3	2,3
4	1,7
5	1,4
6	1,3
7	1,3
8	1,2
9	1,2

Jeżeli w odniesieniu do pewnej wielkości  $X_i$  istnieje tylko jedna wartość pomiarowa, wartość wyniku poprzedniego pomiaru, wartość wzięta z literatury lub wartość poprawki, to należy ją traktować jako estymator  $x_i$ . Należy również wykorzystywać wartość odpowiedniej wariancji  $s_{xi}^2$ , o ile jest ona podana lub da się wyliczyć z jednoznacznych danych dotyczących niepewności. Jeżeli takich danych nie ma, to należy oszacować wariancję na podstawie doświadczenia.

Jeżeli na podstawie doświadczenia lub teorii można przyporządkować jakiejś wartości  $X_i$  określony rozkład statystyczny, to należy wyznaczyć estymator odchylenia standardowego z zależności:

$$s_{xi} = v_{xi} \cdot x_i, \quad (14)$$

gdzie  $v_{xi}$  oznacza współczynnik zmienności dla danego rozkładu zmiennej losowej  $X_i$ , który można traktować jako niepewność względną (odniesioną do wartości pomiarowej  $x_i$ ), tzn. odchylenie standardowe względne.

Często zachodzi przypadek, że dla danej wielkości  $X_i$  można tylko oszacować dolny i górny kres - granicę, odpowiednio  $a_{id}$  oraz  $a_{ig}$ ; ma to na przykład miejsce, gdy w specyfikacji narzędzia pomiarowego są podane w ten sposób niepewności graniczne w określonych warunkach albo gdy zachodzi regulacja temperatury w określonych granicach. W takim przypadku należy oszacować wartość pomiarową wyrażeniem:

$$x_i = \frac{1}{2} (a_{id} + a_{ig}) , \quad (15)$$

tzn. wartością środkową między tymi granicami, natomiast wariancję - wyrażeniem:

$$s_{xi}^2 = \frac{1}{3} a_i^2 , \quad (16)$$

gdzie podstawiono  $a_i = 1/2 (a_{ig} - a_{id})$ . Jak stąd wynika, założono w tym przypadku rozkład jednostajny (prostokątny).

Jak wynika ze wzoru (9), wariancja wielkości wynikowej dla nieskorelowanych wielkości wejściowych wynosi:

$$s_y^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial G}{\partial X_i} \right)^2 s_{xi}^2 . \quad (17)$$

Jeżeli w szczególnym przypadku funkcja  $G$  zawiera w sobie tylko iloczyny lub ilorazy wielkości wejściowych (por. na przykład wzór 1), to łatwo wykazać, że wtedy wszystkie wyrazy

$$\left(\frac{\partial G}{\partial X_i}\right)^2 = \left(\frac{Y}{X_i}\right)^2 \quad (18)$$

i zamiast ze wzoru (17) dotyczącego wariancji można korzystać ze wzoru uproszczonego

$$(s_y')^2 = \sum_{i=1}^n (s_{xi}')^2 \quad (19)$$

dotyczącego wariancji względnych, w którym zastosowano następujące oznaczenia:

$$s_y' = \frac{s_y}{y} \quad (20)$$

oraz

$$s_{xi}' = \frac{s_{xi}}{x_i}, \quad (21)$$

przy czym dla wyniku pomiaru obowiązuje zależność

$$y = G(x_1, x_2, \dots, x_p, \dots, x_n) . \quad (22)$$

W krajach, należących do stowarzyszenia WECC (*Western European Calibration Cooperation* - Zachodnio-Europejska Współpraca w Dziedzinie Kalibracji) przyjęto, że w certyfikatach kalibracyjnych wystawianych przez laboratoria metrologiczne podaje się jako wartość niepewności globalnej odchylenie standardowe (por. wzory 17 lub 19) pomnożone przez pewien współczynnik pokrycia  $z = 2$ . Tak wyrażona niepewność odpowiada więc przedziałowi dwusigmowemu i w przypadku rozkładu normalnego jest to równoznaczne z przyjęciem poziomu ufności w przybliżeniu 95%.

Jeżeli między wielkościami  $X_i$  i  $X_j$  istnieje pewna korelacja, to wyznaczając wariancję wg wzoru (9) należy uwzględnić również drugą sumę, obliczając odpowiednie estymatory kowariancji wg wzoru (11).

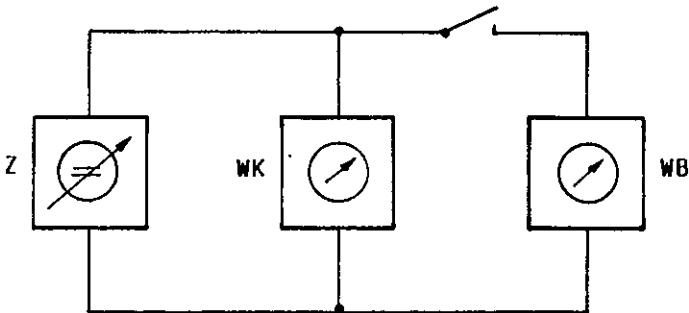
## 6. PRZYKŁADY OCENY NIEPEWNOŚCI WYNIKU POMIARU

### Przykład 4

Obiektem pomiaru ma być woltomierz cyfrowy prądu stałego o rozdzielczości 1 mV, dla którego należy wyznaczyć poprawkę oraz niepewność wskazań przy napięciu wejściowym 3 V. Zakładamy, że pomiar został wykonany w układzie, którego schemat przedstawiono na rys. 2. Jak stąd wynika, układ składa się - poza woltomierzem badanym *WB* - z precyzyjnie regulowanego zasilacza prądu stałego *Z* oraz z woltomierza kontrolnego *WK* - etalonu, którym jest woltomierz cyfrowy o rozdzielczości 0,1 mV, którego niepewność wskazań powinna być co najmniej trzy razy mniejsza od niepewności wskazań woltomierza badanego. Podczas całego eksperymentu należy utrzymywać napięcie wskazywane przez woltomierz *WK* o wartości 3,0000 V. Niepewność wskazań woltomierza *WK* jest określona następująco:

- w ciągu 3 miesięcy od czasu ostatniej kalibracji i w temperaturze odniesienia 20°C niepewność wskazań zawarta jest w przedziale  $\pm(0,0072\% \text{ wskazania} + 2 \text{ kwanty})$ ,
- współczynnik temperaturowy  $\pm(0,0007\% \text{ wskazania} + 0,5 \text{ kwantu})/^\circ\text{C}$ .

Podczas pomiaru temperatura wynosiła 25°C; woltomierz kontrolny ma ważny certyfikat kalibracji, która była przeprowadzona dwa miesiące temu. Ze względu na równoległe połączenie woltomierzy *WK* i *WB* ich opór wejściowy nie wpływa na wyniki komparacji



Rys. 2. Układ kalibracji woltomierza *WB*

*WB* - woltomierz badany, *WK* - woltomierz kontrolny, etalon,  
*Z* - zasilacz regulowany

wskazań obu woltomierzy. Zakłada się, że za pomocą wyłącznika uzyskano 5 niezależnych pomiarów - wskazań woltomierza *WB*, przy czym wskazanie woltomierza *WK* było stałe i wynosiło 3,0000 V. Wskazania woltomierza *WB* były następujące:

$$x_{11} = 3,012 \text{ V}$$

$$x_{12} = 3,008 \text{ V}$$

$$x_{13} = 3,001 \text{ V}$$

$$x_{14} = 3,019 \text{ V}$$

$$x_{15} = 3,006 \text{ V}.$$

Wartość średnia (por. wzór 12)

$$x_1 = \bar{x}_{1k} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 x_{1k} = \frac{1}{5} (3,012 + 3,008 + 3,001 + 3,019 + 3,006) = 3,009 \text{ V} . \quad (23)$$

Poprawka woltomierza *WB* wynosi więc (wartość poprawna minus wartość wskazana)  $3,000 - 3,009 = -0,009 \text{ V}$ .



Jak wiadomo, wartość średnia jest zmienną losową, której odchylenie standardowe można oszacować wyrażeniem wg wzoru (13a).

Wyznamy najpierw wariancję pojedynczego pomiaru wg wzoru (10)

$$s_{x1}^2 = \frac{1}{5-1} [(3,012 - 3,009)^2 + (3,008 - 3,009)^2 + (3,001 - 3,009)^2 + (3,019 - 3,009)^2 + (3,006 - 3,009)^2] = 45,7 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2 \quad (24)$$

Ponieważ liczebność próby jest dość mała ( $m = 5$ ), wobec tego należy pomnożyć tę ostatnią wartość wariancji przez współczynnik  $1,4^2$  (por. tabl. 1 w pkt. 5). Tak więc ostatecznie przyjmujemy, że:

$$s_{x1}^2 = 45,7 \cdot 10^{-6} \cdot 1,4^2 = 89,5 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2, \quad (25)$$

czyli odchylenie standardowe

$$s_{x1} = 9,5 \cdot 10^{-3} \text{ V}. \quad (26)$$

Zgodnie ze wzorem (13a) odchylenie standardowe wartości średniej:

$$s_{\bar{x}_{1k}} = \frac{9,5 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{5}} = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ V}. \quad (27)$$

Wyznamy teraz niepewność wskazania etalonu - woltomierza kontrolnego. Jak wynika z danych technicznych tego woltomierza, niepewność jego wskazań wynosi przy wskazaniu 3,0000 V

$$\begin{aligned} \pm(0,0072\% \cdot 3 + 2) &= \pm(7,2 \cdot 10^{-5} \cdot 3 + 2 \cdot 10^{-4}) \text{ V} = \\ &= \pm(2,2 + 2) \cdot 10^{-4} \text{ V} = \pm 4,2 \cdot 10^{-4} \text{ V}, \end{aligned} \quad (28)$$

a zgodnie ze wzorem (16)

$$s_{x2} = \frac{4,2 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{3}} = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ V} . \quad (29)$$

Zgodnie z wymaganiami technicznymi na woltomierz kontrolny dochodzi do tego niepewność wskazań związana z tym, że pomiar wykonujemy w temperaturze różniącej się o 5°C od temperatury odniesienia, przy której została przeprowadzona ostatnia jego kalibracja. Niepewność ta wynosi więc:

$$\begin{aligned} \pm (0,0007\% \cdot 3 + 0,5) \cdot 5 \text{ V} &= \pm (7 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 5 + 0,5 \cdot 5) \text{ V} = \\ &= \pm (1,0 + 2,5) \cdot 10^{-4} \text{ V} = \pm 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ V} , \end{aligned} \quad (30)$$

a zgodnie ze wzorem (16)

$$s_{x3} = \frac{3,5 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{3}} = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ V} . \quad (31)$$

Niepewność wskazań etalonu wynosi więc (jako odchylenie standardowe):

$$s_e = \sqrt{s_{x2}^2 + s_{x3}^2} = \sqrt{2,4^2 + 2^2} \cdot 10^{-4} = 3,1 \cdot 10^{-4} \text{ V} . \quad (32)$$

Tak więc ostatecznie odchylenie standardowe odpowiadające niepewności wskazania 3,0000 V przez woltomierz kontrolny wynosi:

$$s = \sqrt{s_{x_k}^2 + s_e^2} = \sqrt{4,2^2 \cdot 10^{-6} + 3,1^2 \cdot 10^{-8}} = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ V} , \quad (33)$$

a więc niepewność wskazań samego etalonu nie ma praktycznego wpływu na ocenę niepewności wskazań badanego woltomierza.

Uwzględniając wreszcie współczynnik pokrycia  $z = 2$  uzyskamy niepewność globalną:

$$n = \pm s \cdot z = \pm 2 \cdot 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ V} = \pm 8,4 \cdot 10^{-3} \text{ V} \quad (34)$$

Ostateczny wynik pomiaru wskazany przez woltomierz badany można więc zapisać następująco:

$$x_1 = (3,009 \pm 8,4 \cdot 10^{-3}) \text{ V} = 3,009(1 \pm 2,8 \cdot 10^{-3}) \text{ V}, \quad (35)$$

a więc tym woltomierzem można mierzyć wartość poprawną po zastosowaniu wyznaczonej poprawki ze względną niepewnością wskazań  $\pm 0,28\%$ .

### Przykład<sup>\*)</sup>

Jeżeli do zawieszonoego jednym końcem drutu o promieniu  $r$  i długości  $l$  przyłożyć moment siły  $M$ , to kąt skręcenia  $\varphi$  można wyrazić wzorem:

$$\varphi = \frac{2lM}{k\pi r^4}, \quad (36)$$

gdzie  $k$  oznacza moduł sprężystości drutu wyrażony w niutonach na metr kwadratowy i radian -  $\text{N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{rad}^{-1}$ . W rezultacie pomiarów wstępnych uzyskano następujące wyniki wielkości pomocniczej  $p = \varphi/M$ : 4,00; 3,98; 4,02; przy czym przybliżone wartości wielkości geometrycznych wynosiły:  $r = (1,0 \pm 0,1) \text{ mm}$ , a  $l = (50 \pm 1) \text{ cm}$ . Promień drutu zmierzono suwmiarką, natomiast jego długość - linijką centymetrową. Należy założyć, że wszystkie poprawki są pomijalnie małe w porównaniu do niepewności pomiaru. Celem pomiaru jest wyznaczenie wartości modułu sprężystości  $k$  i określenie jego niepewności.

---

<sup>\*)</sup> Przykład zaczerpnięto z [16].

Wartość średnia pomocniczej wielkości  $p$  wynosi:

$$\bar{p} = \frac{1}{3} (4,00 + 3,98 + 4,02) = 4,00 \quad (37)$$

a jej odchylenie standardowe (por. wzory 10 i 13 oraz współczynnik w tabl. 1 w pkt. 5):

$$s_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 3} [(4,00 - 4,00)^2 + (3,98 - 4,00)^2 + (4,02 - 4,00)^2]} \cdot 2,3 = 0,026, \quad (38)$$

a więc odchylenie standardowe względne

$$s_{\bar{p}}' = \frac{s_{\bar{p}}}{\bar{p}} = \frac{0,026}{4,0} = 0,0065. \quad (39)$$

Biorąc pod uwagę graniczne niepewności pomiaru długości - promienia  $r$  i długości drutu  $l$  - można wyznaczyć również analogiczne odchylenia standardowe względne (por. wzór 16):

$$s_r' = \frac{s_r}{r} = \frac{0,1}{\frac{\sqrt{3}}{1}} = 0,058 \quad (40)$$

oraz

$$s_l' = \frac{s_l}{l} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{50}} = 0,0115. \quad (41)$$

Pamiętając, że  $k = \frac{2l}{\pi pr^4}$ , można wyznaczyć odpowiednie pochodne cząstkowe (por. wzór 9):

$$\frac{\partial k}{\partial l} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{pr^4} = \frac{k}{l}, \quad (42)$$

$$\frac{\partial k}{\partial p} = \frac{2}{\pi} \frac{l}{r^4} \left( -\frac{1}{p^2} \right) = -\frac{k}{p}, \quad (43)$$

$$\frac{\partial k}{\partial r} = \frac{2}{\pi} \frac{l}{p} \left( -\frac{4r^3}{r^8} \right) = -\frac{4k}{r}. \quad (44)$$

Przyjmując, że wielkości  $p$ ,  $l$  i  $r$  są niezależne, można zgodnie ze wzorem (9) napisać:

$$s_k^2 = \frac{k^2}{l^2} s_l^2 + \frac{k^2}{p^2} s_p^2 + \frac{16k^2}{r^2} s_r^2 \quad (45)$$

lub

$$\begin{aligned} (s_k')^2 &= \frac{s_k^2}{k^2} = \frac{s_l^2}{l^2} + \frac{s_p^2}{p^2} + 16 \frac{s_r^2}{r^2} = (s_l')^2 + (s_p')^2 + 16 (s_r')^2 = \\ &= 0,0115^2 + 0,0065^2 + 16 \cdot 0,058^2 = (132 + 42 + 53800) \cdot 10^{-6} \end{aligned} \quad (46)$$

Z tej wstępnej analizy i próbnych pomiarów wynika, że decydujący wpływ na niepewność wyznaczenia wartości modułu sprężystości  $k$  będzie miała niepewność wyznaczenia promienia drutu  $r$ . Chcąc więc zmniejszyć niepewność pomiaru, należy dokładniej zmierzyć ten promień i przeprowadzić pomiary powtarzane o liczności, np. 15. Chcąc uzyskać większą dokładność pomiarów promienia, trzeba będzie zwiększyć rozdzielczość przyrządu pomiarowego, co można uzyskać mierząc promień drutu śrubą mikrometryczną (rozdzielczość 0,01 mm). Wyniki tych pomiarów zestawiono w tabelicy 2.

Wartość średnia

$$\bar{r} = \frac{1}{15} \sum_{k=1}^{15} r_k = 1,00 \text{ mm}, \quad (47)$$

a jej odchylenie standardowe

$$s_r = \sqrt{\frac{1}{14 \cdot 15} \sum_{k=1}^{15} (r_k - \bar{r})^2} = \sqrt{\frac{18 \cdot 10^{-4}}{14 \cdot 15}} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \quad (48)$$

i względne odchylenie standardowe

$$s_r' = \frac{s_r}{\bar{r}} = 2,9 \cdot 10^{-3} \quad (49)$$

Tablica 2

Wyniki powtarzanych pomiarów promienia drutu  
za pomocą śruby mikrometrycznej

$k$	$r_k$	$r_k - \bar{r}$	$(r_k - \bar{r})^2 \cdot 10^4$
1	1,01	0,01	1
2	1,00	0,00	0
3	0,99	-0,01	1
4	0,98	-0,02	4
5	1,00	0,00	0
6	0,99	-0,01	1
7	1,01	0,01	1
8	1,02	0,02	4
9	0,99	-0,01	1
10	1,01	0,01	1
11	0,99	-0,01	1
12	1,00	0,00	0
13	1,01	0,01	1
14	1,01	0,01	1
15	0,99	-0,01	1
$\Sigma$	15,00	0,00	18

Tak więc teraz wyrażenie (46) przybierze wartość:

$$\begin{aligned}(s_k') &= 0,0115^2 + 0,0065^2 + 16 \cdot (2,9 \cdot 10^{-3})^2 = \\ &= (132 + 42 + 135) \cdot 10^{-6} = 309 \cdot 10^{-6}\end{aligned}\quad (50)$$

i ostatecznie względne odchylenie standardowe:

$$s_k' = \sqrt{309 \cdot 10^{-6}} = 17,6 \cdot 10^{-3} \hat{=} 1,76\%.\quad (51)$$

Poprawna wartość wyniku pomiaru jest równa:

$$k = \frac{2}{\pi} \frac{l}{p r^4} = \frac{2}{\pi} \frac{0,5}{4,00 \cdot 10^{-12}} = 79,6 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{rad}.\quad (52)$$

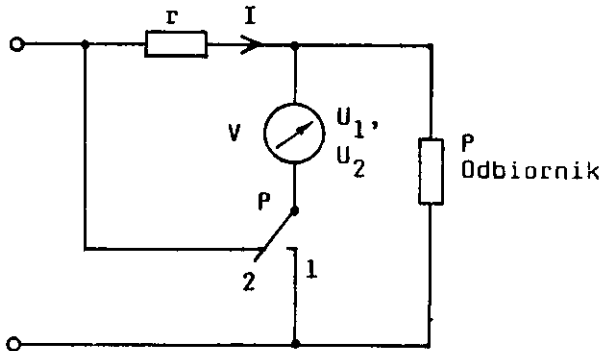
Wynik końcowy zapisujemy więc ostatecznie w następującej postaci (współczynnik pokrycia  $z = 2$ ):

$$\begin{aligned}k &= 79,6 \cdot 10^9 (1 \pm 2 \cdot 0,0176) = 79,6 \cdot 10^9 (1 \pm 0,035) \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{rad} = \\ &= (79 \cdot 10^9 \pm 2,8 \cdot 10^9) \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{rad}.\end{aligned}\quad (53)$$

### Przykład 6

Zadanie polega na pomiarze mocy  $P$  traconej w pewnym odbiorniku (por. rys. 3). Woltomierzem  $V$  będziemy mierzyli napięcie na odbiorniku  $U_1$  w pozycji 1 przełącznika i tym samym woltomierzem  $V$  będziemy mierzyli - w sposób pośredni - prąd  $I$  płynący przez ten odbiornik jako iloraz napięcia  $U_2$  w pozycji 2 przełącznika przez opór  $r$ . Zakładając, że opór  $r = 10 \Omega = \text{const}$  (wartość poprawna) oraz, że opór wejściowy woltomierza  $V$  jest znacznie większy od oporu  $r$  oraz oporu odbiornika, należy wyznaczyć poprawną wartość mocy  $P$  traconej w odbiorniku, jeżeli wyniki  $m = 10$  pomiarów powtarzanych napięć  $U_1$  i  $U_2$  były następujące:

Nr pomiaru $k$	Napięcie $u_{1k}$ (volt)	Napięcie $u_{2k}$ (volt)
1	20,1	1,00
2	20,0	1,00
3	20,2	1,01
4	19,9	1,00
5	20,0	0,99
6	20,1	1,01
7	19,9	0,98
8	19,8	0,99
9	20,1	1,02
10	19,9	1,00



Rys. 3. Układ elektryczny do pomiaru mocy  $P$  traconej w odbiorniku

$I$  - prąd,  $P$  - moc tracona w odbiorniku,  $r$  - opór,  $V$  - woltomierz,  $U_1$  - napięcie wskazywane przez woltomierz  $V$  w pozycji 1 przełącznika,  $U_2$  - napięcie wskazywane w pozycji 2 przełącznika

Należy założyć, że w ww. wartościach napięć uwzględniono już poprawki. Jak stąd widać, należy się liczyć ze znaczną korelacją wskazań napięć  $U_1$  i  $U_2$ , ponieważ są one mierzone tym samym wól-



tomierzem. Tak więc oprócz poszczególnych wariancji będziemy prawdopodobnie musieli uwzględnić również kowariancję. Wyniki pośrednich obliczeń zestawiono w tabelicy 3.

Tablica 3

Wyniki pośrednich obliczeń dotyczących pomiarów napięć

$k$	$u_{1k}$	$u_{1k} - \bar{u}_{1k}$	$(u_{1k} - \bar{u}_{1k})^2$	$u_{2k}$	$u_{2k} - \bar{u}_{2k}$	$(u_{2k} - \bar{u}_{2k})^2$	$(u_{1k} - \bar{u}_{1k})(u_{2k} - \bar{u}_{2k})$
1	20,1	0,1	0,01	1,00	0,00	0,0000	0,000
2	20,0	0,0	0,00	1,00	0,00	0,0000	0,000
3	20,2	0,2	0,04	1,01	0,01	0,0001	0,002
4	19,9	-0,1	0,01	1,00	0,00	0,0000	0,000
5	20,0	0,0	0,00	0,99	-0,01	0,0001	0,000
6	20,1	0,1	0,01	1,01	0,01	0,0001	0,001
7	19,9	-0,1	0,01	0,98	-0,02	0,0004	-0,002
8	19,8	-0,2	0,04	0,99	-0,01	0,0001	0,002
9	20,1	0,1	0,01	1,02	0,02	0,0004	0,002
10	19,9	-0,1	0,01	1,00	0,00	0,0000	0,000
$\Sigma$	200,0	0,0	0,14	10,00	0,00	0,0012	0,005

Podstawowe równanie pomiaru jest następujące:

$$P = G(U_1, U_2) = \frac{U_1 U_2}{r}, \quad (54)$$

gdzie moc  $P$  wyrażana jest w watach, napięcia  $U_1$  i  $U_2$  - w woltach, a opór  $r$  - w omach.

Wartości średnie równają się odpowiednio:

$$\bar{u}_{1k} = \frac{200}{10} = 20,0 \text{ V} \quad (55)$$

oraz

$$\bar{u}_{2k} = \frac{10,0}{10} = 1,00 \text{ V}. \quad (56)$$

Poprawna wartość mocy  $P$  równa się więc:

$$\bar{p} = \frac{\bar{u}_{1k} \bar{u}_{2k}}{r} = \frac{20,0 \cdot 1,00}{10} = 2,00 \text{ W.} \quad (57)$$

Zgodnie ze wzorem (9) wariancja tej wielkości

$$s_p^2 = \left( \frac{\partial G}{\partial U_1} \right)^2 \cdot s_{u_{1k}}^2 + \left( \frac{\partial G}{\partial U_2} \right)^2 \cdot s_{u_{2k}}^2 = 2 \frac{\partial G}{\partial U_1} \cdot \frac{\partial G}{\partial U_2} \cdot s_{u_{12}}^2 \quad (58)$$

Pochodne równe są:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial U_1} \right|_{U_2 = \bar{u}_{2k}} = \frac{U_2}{r} = \frac{\bar{u}_{2k}}{r} = \frac{1}{10} \text{ A} \quad (59)$$

oraz

$$\left. \frac{\partial G}{\partial U_2} \right|_{U_1 = u_{1k}} = \frac{U_1}{r} = \frac{\bar{u}_{1k}}{r} = \frac{20}{10} = 2 \text{ A.} \quad (60)$$

Wariancje

$$s_{u_{1k}}^2 = \frac{\sum_{k=1}^m (u_{1k} - \bar{u}_{1k})^2}{m(m-1)} = \frac{0,14}{10 \cdot 9} = 0,00155 \text{ V}^2, \quad (61)$$

$$s_{u_{2k}}^2 = \frac{\sum_{k=1}^m (u_{2k} - \bar{u}_{2k})^2}{m(m-1)} = \frac{0,0012}{10 \cdot 9} = 0,0000133 \text{ V}^2 \quad (62)$$

oraz kowariancja

$$s_{u_{12}}^2 = \frac{\sum_{k=1}^m (u_{1k} - \bar{u}_{1k})(u_{2k} - \bar{u}_{2k})}{m(m-1)} = \frac{0,005}{10 \cdot 9} = 0,0000555 \text{ V}^2. \quad (63)$$

Uwzględniając ww. wartości we wzorze (58) otrzymamy:

$$s_p^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot 0,00155 + 2^2 \cdot 0,0000133 + 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot 2 \cdot 0,0000555 =$$

$$= 0,0000909 \text{ W}^2, \quad (64)$$

a więc odchylenie standardowe

$$s_p = \sqrt{0,0000909} = 0,00953 \text{ W}. \quad (65)$$

Tak więc ostateczny wynik pomiaru mocy  $P$  jest następujący:

$$p = \bar{p} \pm 2s_p = (2 \pm 2 \cdot 0,0095) \text{ W} = (2 \pm 0,019) \text{ W} =$$

$$= 2(1 \pm 0,0095) \text{ W} \quad (66)$$

## 7. SCHEMAT PROCEDURY WYZNACZANIA NIEPEWNOŚCI WYNIKU POMIARU

Poniżej zrekapitulujemy instrukcję<sup>\*)</sup> dotyczącą sposobu postępowania przy wyznaczaniu niepewności wyniku pomiaru.

- a) Zależność wielkości mierzonej (wielkości wyjściowej)  $Y$  od wielkości wejściowych  $X_i$  należy wyrażać w postaci matematycznej odpowiednio do równania (2). Ta zależność w przypadku porównania dwóch etalonów może być bardzo prosta, np.  $Y = X + \Delta X$ .
- b) Należy wyznaczyć wszystkie niezbędne poprawki i wnieść je do wszystkich znanych systematycznych odchyłek pomiarowych.
- c) W zestawieniu niepewności należy przytoczyć wszystkie składniki, które pochodzą zarówno od pomiarów powtarzanych, jak i od

---

<sup>\*)</sup> Tekst tej instrukcji oparto na [6].

wyników poprzednich pomiarów, od poprawek oraz wielkości wpływających.

- d) Dla wielkości mierzonych wielokrotnie należy obliczać wariancje  $s_{\bar{x}_{ik}}$  zgodnie ze wzorem (13a) lub kowariancje  $s_{\bar{x}_{ij}}$  zgodnie ze wzorem (13b), o ile wykonano co najmniej dziesięć pojedynczych pomiarów; jeżeli jest to niemożliwe, należy stosować współczynnik podany w tablicy 1 w pkt. 5.
- e) Dla pojedynczych wartości, np. dla wyników poprzednich pomiarów, wartości poprawek, wartości wziętych z literatury itp., należy stosować wartości wariancji, o ile są one podane lub dają się obliczyć. Jeżeli nie zachodzi ten przypadek, to należy te wariancje oszacowywać na podstawie doświadczenia.
- f) Dla wielkości wpływających, których funkcja rozkładu jest znana lub może być założona, należy wyznaczyć wariancję odpowiadającą temu rozkładowi. Jeżeli można podać tylko dolną i górną granicę lub można je oszacować, to należy obliczyć wariancję zgodnie ze wzorem (16).
- g) Wariancję wielkości wynikowej  $s_y^2$  należy obliczać zgodnie ze wzorem (9).
- h) Niepewność globalną uzyskujemy przez pomnożenie odchylenia standardowego  $s_y$  przez współczynnik pokrycia  $z = 2$ .
- i) Wynik pomiaru należy przedstawiać w postaci  $y \pm 2 s_y$ , gdzie  $y$  oznacza wartość poprawną wielkości mierzonej, a  $s_y$  - odchylenie standardowe tej wielkości.

#### WYKAZ LITERATURY

1. Bek J. et al.: Weryfikacja i próba ujednoczenia podstawowych pojęć metrologii stosownie do aktualnych potrzeb nauki i techniki. Politechnika Warszawska, Centralny Program Badań Podstawowych 02.20, Grupa Tematyczna I, Raport roczny. Warszawa 1988.

2. Dudziewicz J.: Miernictwo telekomunikacyjne ogólne. Glosarium Telekomunikacji, zeszyt 3. Instytut Łączności, Warszawa 1989.
3. Dudziewicz J.: Niepewności wyników pomiaru. Biuletyn Informacyjny Instytutu Łączności, nr 11-12 (285 - 286), 1990.
4. Dudziewicz J.: Określenia i oceny niepewności pomiaru w świetle praktyki wielkich ośrodków metrologicznych. Biuletyn Informacyjny Instytutu Łączności, nr 1-2 (223-224), 1984.
5. Dudziewicz J.: Praktyczna metoda oceny niepewności pomiaru. Biuletyn Informacyjny Instytutu Łączności, nr 10 (303), 1992.
6. Ermittlung von Messunsicherheiten, DKD-3, PTB, Braunschweig, Ausgabe 1990.
7. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, ISO, Genève 1993.
8. International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology. ISO, Genève 1993.
9. Jaworski J.: Matematyczne podstawy metrologii. WNT, Warszawa 1979.
10. Mała encyklopedia metrologii. WNT, Warszawa 1989.
11. Metrologia. Nazwy i określenia. Polska Norma. PN-71/N-02050. PKN, Wydawnictwa Normalizacyjne, Warszawa 1971.
12. Obalski J.: Podstawy metrologii. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej. Warszawa 1966.
13. Osnownyje terminy w oblasti metrologii. Słownik - sprawocznik. Izdatielstwo Standartow, Moskwa 1989.
14. Piotrowski J.: Teoria pomiarów. Pomiar w fizyce i technice. PWN, Warszawa 1986.
15. Podręcznik metrologii. Praca pod redakcją P.H. Sydenhama. WKŁ, Warszawa, tom I - 1988, tom II - 1990.
16. Teoria pomiarów. Praca pod redakcją H. Szydłowskiego. PWN, Warszawa 1978.
17. Urban A.: Podstawy miernictwa. Część I. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1977.

