Wspomaganie procesu ustalania cen detalicznych na konkurencyjnym rynku usług telekomunikacyjnych z asymetrią informacyjną

Sylwester Laskowski

Na podstawie elementów teorii gier i wspomagania decyzji zaprezentowano analityczne narzędzia, wspierające graczy rynkowych w procesie ustalania cen detalicznych za świadczone usługi, w przypadku braku informacji o macierzy wypłat graczy konkurencyjnych.

teoria gier, kryteria wyboru strategii w grach przeciwko naturze, gry rynkowe, metoda punktu odniesienia, koncepcja operatora najbardziej obiecującego, ceny za usługi telekomunikacyjne

Wprowadzenie

Z punktu widzenia teorii gier [21, 25, 29] sytuację konkurencji na rynku usług telekomunikacyjnych należy traktować jako wielokryterialną, wieloosobową grę o sumie niezerowej [9], w której poszczególni gracze, przedsiębiorstwa telekomunikacyjne dążą do realizacji określonej polityki. Miarę stopnia realizacji tej polityki stanowią określone kryteria oceny (funkcje wypłaty), takie jak: zysk, udział w rynku, jakość świadczonych usług, ponoszone koszty czy wielkość generowanego ruchu. Szczególnym przypadkiem jest sytuacja, gdy przedsiębiorstwo rozpatruje tylko jedno z kryteriów oceny. W kategoriach pojęć teorii gier sytuację taką można określić jako grę jednokryterialną. Wartość funkcji wypłaty w jednokryterialnej grze rynkowej zależy bezpośrednio od decyzji podjętej przez dane przedsiębiorstwo (danego gracza). W wielu przypadkach wartość ta zależy również od decyzji konkurentów.

Decyzje graczy dotyczące sposobu rozegrania gry rynkowej nazywa się **strategiami gry**. W tablicy 1 zilustrowano wzajemną zależność między pojęciami strategii i wypłaty dla dwóch graczy – gracza A i gracza B. Jest to tzw. **macierz wypłat**. W macierzy tej przedstawiono wypłaty zarówno gracza A, jak i gracza B. Gracz A ma tu do wyboru cztery strategie a_1, a_2, a_3 i a_4, natomiast gracz B – strategie b_1, b_2, b_3 i b_4. Jeśli gracz A wybierze strategię a_i, a gracz B strategię b_j, to otrzymają oni w ten sposób wypłaty – odpowiednio $V^A_{i,j}$ i $V^B_{i,j}$.

Tabl. 1. Ilustracja pojęć strategia i wypłata

Strategie	b_1	b_2	$\mathbf{b_3}$	b_4
a_1			$\vdots$	
$\mathbf{a_2}$	……	……	$[\mathbf{V^A_{2,3}}, \mathbf{V^B_{2,3}}]$	……
a_3			$\vdots$	
a_4			$\vdots$	

Gracz (A) zna własną macierz wypłat, jeśli zna własną funkcję wypłaty oraz potencjalne strategie gry wszystkich graczy, biorących udział w tej grze. Gracz (A) zna także macierz wypłat innego gracza (B), jeśli zna jego funkcję wypłaty oraz potencjalne strategie wszystkich graczy, biorących udział w tej grze. Grę, w której dany gracz zna wyłącznie własną macierz wypłat, określa się jako **grę przeciwko naturze**. Grę, w której dany gracz zna również macierze wypłat pozostałych graczy, określa się jako ***N*-osobową grę o sumie niezerowej** [9].

W niniejszym artykule będzie rozpatrywana sytuacja o charakterze gry przeciwko naturze. Funkcja wypłaty będzie opierała się na modelu popytu świadczonych usług i/lub modelu ponoszonych z tego tytułu kosztów. Przykładem tego rodzaju gry rynkowej jest gra o maksymalizację zysku, gra, w której przedsiębiorstwo zna model popytu na świadczone usługi oraz wyłącznie własny model kosztów. W celu określenia strategii gry zostanie wprowadzona definicja 1.

Definicja 1. *Jednostka usługowa SU_{Anpm} jest to elementarna część m usługi lub usług, świadczonych przez przedsiębiorstwo A, w n-tej strefie numeracyjnej, użytkownikowi o profilu p. Z tytułu świadczenia jednostki usługowej SU_{Anpm}, od użytkownika jest pobierana opłata P_{Anpm}.*

Opierając się na danej definicji jednostki usługowej SU_{Anpm} oraz opłaty za nią P_{Anpm}, zostanie zdefiniowane pojęcie strategii.

Definicja 2. *Strategią a_i przedsiębiorstwa A nazywa się zbiór par* $\{(SU_{Anpm}, P^i_{Anpm})\}$.

W niniejszym artykule będą analizowane strategie, dotyczące jednostek usługowych świadczonych na rynkach detalicznych.

W przypadku gdy gracz zna *a priori* strategie wybrane przez konkurentów (ceny na rynkach detalicznych konkurentów są już ustalone i nie ulegną zmianie w najbliższym czasie), jego decyzja sprowadza się do optymalizacji własnej funkcji wypłaty, dla której wybrane przez konkurentów strategie są traktowane jako parametry. Natomiast gdy gracz nie zna *a priori* decyzji konkurentów[1], swoje decyzje musi opierać wyłącznie na analizie własnej macierzy wypłat i pewnej subiektywnie wybranej racjonalnej procedurze wyboru strategii, będącej odbiciem jego stosunku do niepewności, jaka w tej decyzji jest zawarta.

Kryteria wyboru strategii w grach przeciwko naturze

Rozpatrzony zostanie przypadek, w którym przedsiębiorstwo telekomunikacyjne – gracz A zna wyłącznie własną funkcję wypłaty definiującą jednokryterialną grę, w którą to przedsiębiorstwo gra[2]. Przy założeniu znajomości potencjalnych strategii gry konkurentów oraz konieczności podejmowania decyzji jako pierwszy, grę tę można traktować jako grę przeciwko naturze, w której stanowi natury odpowiada iloczyn kartezjański strategii wybranych przez pozostałych graczy. Jeśli przyjąć, że gracz $X \neq A$ ma $\mathfrak{I}_X$ dopuszczalnych strategii, to liczba dopuszczalnych stanów natury $\mathfrak{I}_N$ będzie równa $\mathfrak{I}_N = \prod_X \mathfrak{I}_X$. Dla uproszczenia natura zostanie określona jako gracz N, a jego j-ta strategia oznaczona n_j. W szczególnym przypadku, gdy w grze bierze udział tylko dwóch graczy A i B, j-ty stan natury będzie odpowiadał j-tej strategii gracza B ($n_j = b_j$). W ujęciu macierzowym, przy założeniu, że gracz A

[1] *Zasadniczo tylko ten przypadek powinien być określany jako gra przeciwko naturze. W tego typu grach zakłada się bowiem, że stany natury, którym tu odpowiadają wybrane przez konkurentów strategie, nie są a priori znane.*

[2] *Każdy z graczy rynkowych bierze udział w każdej z jednokryterialnych gier rynkowych, w których funkcja wypłaty opiera się na modelu popytu, czyli że jego decyzje dotyczące wysokości cen (wybrane strategie gry) wpływają na wartość funkcji wypłaty w każdej z gier. Natomiast dany gracz gra w daną grę, jeśli jest zainteresowany wartością funkcji wypłaty z tej gry.*

i gracz N mają po trzy strategie, grę tę, z punktu widzenia gracza A, można przedstawić w takiej postaci, jak w tablicy 2.

Tabl. 2. Macierz wypłat dla gracza A

Strategie	n_1	n_2	n_3
a_1	$V_1^A(a_1)$	$V_2^A(a_1)$	$V_3^A(a_1)$
a_2	$V_1^A(a_2)$	$V_2^A(a_2)$	$V_3^A(a_2)$
a_3	$V_1^A(a_3)$	$V_2^A(a_3)$	$V_3^A(a_3)$

$V_j^A(a_i)$ oznacza tu wielkość wypłaty dla gracza A, gdy wybrał on strategię a_i, a gracz N – strategię n_j. Przy takim modelu gry, gracz A w swoich decyzjach dotyczących wyboru strategii, w zależności od jego aspiracji, stosunku do ryzyka i wybranej miary oceny otrzymanego wyniku, może kierować się jednym z racjonalnych kryteriów wyboru strategii.

W literaturze można spotkać wiele kryteriów wyboru strategii w grach przeciwko naturze. Warto zatem podać niektóre z nich, zarówno te powszechnie znane [15, 21], jak również i Autora artykułu [13]:

– kryterium Walda:

$$\max\left\{\min_j V_j^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\right\}; \tag{1}$$

– kryterium optymistyczne:

$$\max\left\{\max_j V_j^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\right\}; \tag{2}$$

– kryterium Hurwicza:

$$\max\left\{\alpha \cdot \max_j V_j^A(a_i) + (1-\alpha)\cdot \min_j V_j^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\right\}; \tag{3}$$

– kryterium Laplace'a:

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{J} V_j^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\right\}; \tag{4}$$

– kryterium Savage'a:

$$\min\left\{\max_j \widetilde{V}_j^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\right\}, \tag{5}$$

gdzie funkcja straty (utraconych korzyści) $\widetilde{V}_j^A(a_i)$ wyraża się zależnością:

$$\widetilde{V}_j^A(a_i) = V_{j\max}^A - V_j^A(a_i), \tag{6}$$

$$V_{j\max}^A = \max_i V_j^A(a_i); \tag{7}$$

– kryterium maksymalizacji liczby największych wygranych[1] (LNW):

$$\max\left\{\sum_j \Phi(\widetilde{V}_j^A(a_i)) : i \in \mathfrak{I}_A\right\}, \tag{8}$$

gdzie:

$$\Phi(x) = \frac{\text{sign}(-x)+1}{2}, \tag{9}$$

a $\widetilde{V}_j^A(a_i)$ wyraża się zależnością (6);

– kryterium maksymalizacji liczby największych wygranych z progiem uznania (LNWP):

$$\max\left\{\sum_j \cdot\Phi(\widetilde{V}_j^A(a_i), \rho, V_{j\max}^A) : i \in \mathfrak{I}_A\right\}, \tag{10}$$

gdzie:

$$\Phi(x, \rho, x_{\max}) = \frac{\text{sign}(\rho - \frac{x}{x_{\max}})+1}{2}, \tag{11}$$

próg uznania ρ określa maksymalną wartość stosunku aktualnie rozpatrywanej wartości x (tu wartości funkcji straty (6)) do wartości największej $x_{\max}$, przekroczenie tej wartości upoważnia do traktowania wartości x jako różnej od zera (dostrzegalnej straty); ponieważ x odpowiada wartości funkcji straty $\widetilde{V}_j^A(a_i)$, zatem jeśli stosunek x do $x_{\max}$ nie przekroczy wartości ρ, to wypłatę $V_j^A(a_i)$ można traktować jako największą (ściślej, należącą do grupy uznanych za największe) wypłatę w kolumnie j-tej;

– kryterium maksymalizacji sumy największych wypłat z progiem uznania (SNWP):

$$\max\left\{\sum_j V_j^A(a_i)\cdot\Phi(\widetilde{V}_j^A(a_i), \rho, V_{j\max}^A) : i \in \mathfrak{I}_A\right\}; \tag{12}$$

– kryterium maksymalizacji wartości oczekiwanej wypłaty z progiem uznania (EWP):

$$\max\left\{\sum_j V_j^A(a_i)\cdot\Psi(V_j^A(a_i), v) : i \in \mathfrak{I}_A\right\}, \tag{13}$$

gdzie:

$$\Psi(x, v) = \frac{\text{sign}(x-v)+1}{2}, \tag{14}$$

próg uznania v określa tu minimalną wartość wypłaty $V_j^A(a_i)$, po przekroczeniu której wypłatę tę uznaje się za różną od zera;

[1] *Przez największą wygraną rozumie się tu największą wartość funkcji wypłaty $V_j^A(a_i)$ w danej (j-tej) kolumnie macierzy wypłat. Wypłacie tej odpowiada zerowa wartość funkcji straty (6).*

– kryterium minimalizacji wartości oczekiwanej straty z progiem uznania (ESP):

$$\min\left\{\sum_j \widetilde{V}_j^A(a_i)\cdot\Psi(\widetilde{V}_j^A(a_i),v) : i\in\mathfrak{I}_A\right\}. \tag{15}$$

– kryterium maksymalizacji progowej wartości oczekiwanej wypłaty (PEW):

$$\max\left\{\sum_k\sum_j V_j^A(a_i)\cdot\Psi(V_j^A(a_i),k\cdot v) : i\in\mathfrak{I}_A\right\}, \tag{16}$$

zmienna k umożliwia tu sekwencyjną zmianę wartości progu uznania $k\cdot v$;

– kryterium minimalizacji progowej wartości oczekiwanej straty (PES):

$$\min\left\{\sum_k\sum_j \widetilde{V}_j^A(a_i)\cdot\Psi(\widetilde{V}_j^A(a_i),k\cdot v) : i\in\mathfrak{I}_A\right\}. \tag{17}$$

Sposób wykorzystywania wybranych kryteriów w konkretnym problemie decyzyjnym ilustruje przykład 1.

Przykład 1

Na rynku telefonicznych usług lokalnych funkcjonuje trzech operatorów – A, B i C. Gra jest rozpatrywana z punktu widzenia operatora A. Operator A przygotowuje się do wejścia na nowe rynki lokalne. Wiąże się to z koniecznością poczynienia dużych inwestycji, a zatem i ze zdobyciem dużego kapitału. Z tego powodu A dąży do szybkiej maksymalizacji zysku, czerpanego z działalności prowadzonej na dotychczasowym obszarze. Z analiz rynkowych oraz przeprowadzonego wywiadu A wie, że B stawia sobie w najbliższej perspektywie podobny, jednokryterialnie ujęty cel – zysk, C zaś prowadzi dość unormowaną politykę cenową. Operator A zna wyłącznie własny model kosztów świadczenia usług. Sieci poszczególnych operatorów są wzajemnie połączone, a zawarte umowy *interconnectowe* ustalają wysokości stawek rozliczeniowych na dość długi (znacząco dłuższy, niż umowy zawierane z abonentami) czas. Dobiega końca okres trwania umów zawartych między operatorem A a najbardziej dochodowymi jego abonentami. Zbliża się również koniec trwania umów zawartych z abonentami przez pozostałych operatorów, moment ten jednakże nastąpi nieco później. W obecnej sytuacji każdy z operatorów pobiera opłaty od abonentów z wyróżnieniem opłaty abonamentowej oraz opłaty za czas trwania połączenia (zróżnicowanej na trzy grupy: w godzinach szczytu w dniach roboczych, w godzinach poza szczytem oraz w weekendy). Zdecydowanie największe dochody przynosi ruch przesyłany w godzinach szczytu, dlatego uwaga operatora A skupia się na trafnym doborze cen dla tego przedziału (z analiz wynika, że popyt na usługi poza szczytem i weekendy jest bardzo mały oraz zróżnicowany).

Operator A rozpatruje cztery własne strategie gry:

a_1 – utrzymać obecny poziom cen;

a_2 – zmniejszyć o 10% cenę połączeń w godzinach szczytu;

a_3 – zmniejszyć o 15% cenę połączeń w godzinach szczytu i podnieść o 5% cenę abonamentu;

a_4 – zwiększyć o 10% cenę abonamentu.

Operator A spodziewa się, że najbardziej korzystna strategia, jaką w odpowiedzi wybierze operator B, będzie należała do tej grupy czterech strategii, stąd $b_i = a_i$, a zbiór rozważanych przez C strategii składa się z dwóch strategii:

c_1 – utrzymać obecny poziom cen;

c_2 – zmniejszyć o 10% cenę połączeń w godzinach szczytu.

Nieznajomość modelu kosztów operatorów B i C powoduje, że – z punktu widzenia operatora A – sytuacja ta odpowiada modelowi gry przeciwko naturze. Natura N, reprezentująca operatorów B i C, ma tu osiem strategii:

$$\begin{aligned}
n_1 &= (b_1, c_1),\\
n_2 &= (b_2, c_1),\\
n_3 &= (b_3, c_1),\\
n_4 &= (b_4, c_1),\\
n_5 &= (b_1, c_2),\\
n_6 &= (b_2, c_2),\\
n_7 &= (b_3, c_2),\\
n_8 &= (b_4, c_2).
\end{aligned}$$

Dla poszczególnych strategii wartości rocznych zysków (w milionach złotych) operatora A, wyliczone na podstawie modelu popytu i modelu kosztów, są przedstawione w tablicy 3.

Tabl. 3. Przykładowa macierz wypłat operatora A w grze o zysk na rynku telefonicznych usług lokalnych

Strategie	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8
a_1	6	5	4	7	5	4	3	6
a_2	8	4	3	5	7	3	2	4
a_3	7	6	3	6	6	4	2	5
a_4	5	6	6	7	4	5	5	6

Wybór strategii operatora A zależy od jego aspiracji, stosunku do ryzyka i wybranej miary oceny otrzymanego wyniku. Jeżeli operatorowi temu będzie towarzyszył skrajny optymizm odnośnie do odpowiedzi pozostałych graczy, wówczas powinien kierować się kryterium maksymalizacji największej wypłaty – kryterium optymistycznym postaci [15, 21]①:

$$\max\left\{\max_j V_j(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\right\}. \tag{18}$$

Kryterium to wskaże jednoznacznie na strategię a_2, z maksymalną wypłatą równą 8, przy założeniu, że pozostali gracze wybiorą strategie wchodzące w skład strategii n_1 (b_1, c_2).

① *Wymienione w dalszej części artykułu kryteria wyboru strategii w grach przeciwko naturze podano w sposób przykładowy.*

Jeśli operator A będzie skrajnym pesymistą odnośnie do odpowiedzi pozostałych graczy, wówczas powinien kierować się kryterium maksymalizacji najmniejszej wypłaty – kryterium Walda, postaci:

$$\max\left\{\min_j V_j(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\right\}. \tag{19}$$

Kryterium to wskaże jednoznacznie na strategię a_4, zapewniającą operatorowi A wypłatę równą co najmniej 4.

Jeśli z wyniku decyzji, jaką podejmie kierownictwo operatora A, będzie ono musiało rozliczać się przed zarządem, wówczas właściwym (zapewniającym minimum negatywnej oceny otrzymanego wyniku) kryterium wyboru może się okazać kryterium minimalizacji największej straty – kryterium Savage'a, postaci:

$$\min\left\{\max_j \widetilde{V}_j(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\right\}, \tag{20}$$

gdzie

$$\widetilde{V}_j(a_i) = V_{j\max} - V_j(a_i), \tag{21}$$

$$V_{j\max} = \max_i V_j(a_i). \tag{22}$$

Kryterium to wskaże jednoznacznie na strategię a_1 z maksymalną odchyłką od wartości największej (w kolumnie) równej 2.

□

W przytoczonym przykładzie założono, że stawki za ruch wymieniany między sieciami (ceny na rynku hurtowym) są w rozpatrywanym przedziale czasu ustalone. Model gry przeciwko naturze i procedura wyboru strategii oparta na konkretnym kryterium zachowują swą przydatność również wtedy, gdy tak nie jest. Gdy w niedługim czasie po ustaleniu cen na rynku detalicznym jest planowana renegocjacja umów dotyczących cen na rynku hurtowym, dopuszczalne wartości stawek rozliczeniowych można traktować jako strategie dodatkowego, hipotetycznego gracza i włączyć do zbioru dopuszczalnych strategii (stanów) natury. Zostanie to przedstawione w przykładzie 2.

Przykład 2

Sytuacja na rynku telefonicznych usług lokalnych jest taka, jak w przykładzie 1 z tą jednak różnicą, że niedługo po wygaśnięciu aktualnych umów, zawartych między operatorem A a jego najbardziej dochodowymi abonentami, wygasa również umowa *interconectowa*, zawarta przez operatora A z operatorem B. Operator A spodziewa się, że nowa umowa będzie albo przedłużeniem aktualnych warunków współpracy, albo odzwierciedli stawki rozliczeniowe rekomendowane przez regulatora rynku. W momencie ustalania cen na rynku detalicznym operator A nie wie, który z dwóch wariantów zostanie przyjęty w trakcie negocjacji nowej umowy z operatorem B.

Zostaje wprowadzony więc hipotetyczny gracz H, którego strategie gry odzwierciedlają możliwe warianty umowy *interconectowej*, którą zawrą operatorzy A i B. Operator H ma zatem dwie strategie:

h_1 – operatorzy A i B utrzymają obecne stawki rozliczeniowe;

h_2 – operatorzy A i B przyjmą stawki rekomendowane przez regulatora.

Natura N, reprezentująca operatorów B i C oraz hipotetycznego gracza H, ma teraz szesnaście strategii odzwierciedlających kolejne kombinacje strategii gry graczy A, B i H:

$$
\begin{aligned}
n_1 &= (b_1, c_1, h_1),\\
n_2 &= (b_2, c_1, h_1),\\
n_3 &= (b_3, c_1, h_1),\\
n_4 &= (b_4, c_1, h_1),\\
n_5 &= (b_1, c_2, h_1),\\
n_6 &= (b_2, c_2, h_1),\\
n_7 &= (b_3, c_2, h_1),\\
n_8 &= (b_4, c_2, h_1),\\
n_9 &= (b_1, c_1, h_2),\\
n_{10} &= (b_2, c_1, h_2),\\
n_{11} &= (b_3, c_1, h_2),\\
n_{12} &= (b_4, c_1, h_2),\\
n_{13} &= (b_1, c_2, h_2),\\
n_{14} &= (b_2, c_2, h_2),\\
n_{15} &= (b_3, c_2, h_2),\\
n_{16} &= (b_4, c_2, h_2).
\end{aligned}
$$

Na podstawie modelu popytu i modelu kosztów operatora A, dla każdej dopuszczalnej strategii natury – każdej kombinacji cen na rynkach detalicznych operatorów B i C, a także przewidywanych stawek rozliczeniowych między operatorami A i B (strategie hipotetycznego gracza H) – oraz każdej strategii operatora A, można teraz obliczyć wartość osiąganego zysku (wyznaczyć macierz wypłat gracza A w grze przeciwko naturze N, reprezentującej graczy B, C i H). $\square$

Regularyzacja rozwiązań niejednoznacznych

W wyniku zastosowania pojedynczego kryterium wyboru strategii można otrzymać wiele nierozróżnialnych w sensie tegoż kryterium strategii. Dla przykładu, jeśli macierz wypłat gracza A

Tabl. 4. Regularyzacja – macierz wypłat

Strategie	b_1	b_2	b_3
a_1	3	2	2
a_2	1	4	2
a_3	0	4	2

przedstawia się jak w tablicy 4, a gracz ten będzie kierował się w swych decyzjach kryterium maksymalizacji wartości oczekiwanej – kryterium Laplace'a, postaci:

$$\max\left\{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} V_j(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\right\}, \tag{23}$$

wówczas gracz ten otrzyma dwie, nierozróżnialne w sensie tego kryterium strategie a_1 i a_2 z wartościami oczekiwanymi, równymi dla obu $\frac{7}{3}$. Aby jednoznacznie wyłonić spośród nich jedną strategię, gracz A może użyć innego kryterium. Proces ten nazywa się **regularyzacją**. Jeśli do zbioru strategii najlepszych, w sensie wcześniej użytego kryterium Laplace'a (a_1 i a_2), gracz A zastosuje kryterium optymistyczne (18), wówczas otrzyma strategię a_2. Jeśli zaś zastosuje kryterium Walda (19), otrzyma strategię a_1.

Niejednoznaczność rozwiązania otrzymanego w wyniku zastosowania określonego kryterium wyboru strategii może być korzystna. Oznacza bowiem jedynie tę samą wartość kryterium wyboru strategii, czyli pewnej zaagregowanej[1] postaci funkcji wypłaty w jednokryterialnej grze. Wartościom tym odpowiadają jednakże różne strategie gry, czyli różne poziomy cen za poszczególne jednostki usługowe[2]. Ta różnorodność jest pożądana w trakcie negocjacji cen na rynku hurtowym. Zakładając, że negocjacje cen na rynku hurtowym poprzedzają proces ustalania cen na rynku detalicznym, fakt posiadania wielu równoważnych (w sensie określonego kryterium wyboru strategii) rozwiązań problemu wpływa korzystnie na proces dochodzenia do porozumienia. Im więcej równoważnych strategii ma dany gracz, tym szerszy wachlarz kombinacji cen na rynku hurtowym może zaproponować partnerowi w negocjacjach, a co się z tym wiąże, tym większe jest prawdopodobieństwo, że wskaże w ten sposób rozwiązanie zadowalające obie strony [3, 24].

Niejednoznaczność rozwiązania jest pożądana również wtedy, gdy gracz kieruje się nie jednym, a wieloma kryteriami oceny wybranych strategii[3], czyli gdy gra w kilka gier jednocześnie. Strategie równoważne w jednej grze w innej grze nie muszą już być równoważne. Arbitralne usuwanie niejednoznaczności z punktu widzenia tylko jednej gry (jednego kryterium oceny wybranej strategii) może się okazać posunięciem chybionym z punktu widzenia innej gry.

Metoda punktu odniesienia

Niepewność odnośnie do decyzji konkurencyjnych graczy – lub, inaczej mówiąc, wielość stanów natury, które reprezentują dopuszczalne decyzje konkurencyjnych graczy – wprowadza do rozpatrywanej analizy moment wielokryterialny. Każdy ze stanów natury można traktować jako niezależne kryterium oceny wybranej przez danego gracza strategii[4] z_j. Kryteria wyboru strategii (1)–(17) (oznaczone X_k), stanowią przykłady funkcji agregującej te kryteria w jedno syntetyczne kryterium. Kolejny moment wielokryterialny wprowadza regularyzacja rozwiązań niejednoznacznych. Jest to przykład leksykograficznej optymalizacji [15], w której za kolejno optymalizowane kryteria z_j przyjmuje się wcześniej wybrane kryteria wyboru strategii[5] $X(a_i)$. Dalej zostanie przedstawione podejście oparte na metodzie punktu odniesienia [4, 7, 15, 25, 26, 27].

[1] *Jest to agregacja niepewności związanej z możliwymi strategiami gry graczy reprezentowanych przez naturę.*

[2] *Jednostką usługową nazywa się tę część usługi, za którą pobiera się opłatę (na którą jest ustalana cena). Dla przykładu jednostką usługową będzie zakończenie połączenia w sieci operatora, które jest częścią usługi połączenia międzysieciowego.*

[3] *Jest tu subtelna różnica między kryteriami oceny wybranej strategii (funkcje wypłat), z których każde definiuje jednokryterialną grę rynkową (np. grę o zysk, grę o wielkość ruchu itp.), a kryteriami wyboru strategii, służącymi do wskazania najlepszej w określonym sensie strategii gry w jednokryterialnej grze przeciwko naturze (np. kryterium Walda, Laplace'a itd.).*

[4] *Dzieje się tak mimo rozpatrywania jednokryterialnych (zdefiniowanych przez jedną funkcję wypłaty, np. funkcję zysku) gier rynkowych.*

[5] *W innym, równie słusznym rozumieniu, regularyzację można traktować jako tworzenie nowego kryterium wyboru strategii X^*, np. postaci ważonej sumy K kryteriów $X_k(a_i)$, wybranych do regularyzacji*

$$X^*(a_i) = \sum_{k=1}^{K} w_k X_k(a_i)\,,$$

przy czym między poszczególnymi wagami w_k zachodzi zależność $w_1 \gg w_2 \gg \ldots w_k \ldots \gg w_K$, gdzie w_k odpowiada wadze przypisanej kryterium rozpatrywanemu w k-tej iteracji procesu regularyzacji.

Ogólne zasady metody punktu odniesienia

W metodzie punktu odniesienia przyjmuje się, że decydent wyraża swoje preferencje przez określanie dla każdego z optymalizowanych kryteriów z_j takiej wartości, która by go w pełni usatysfakcjonowała. Wartość ta jest nazywana **poziomem aspiracji** dla tego kryterium $\bar{z}_j$. Zbiór takich wartości tworzy w przestrzeni kryteriów wektor $\bar{\mathbf{z}}$ nazywany **punktem aspiracji**. Dla tak dobranego punktu aspiracji jest poszukiwane takie niezdominowane rozwiązanie, dla którego wartość poszczególnych kryteriów oceny z_j jest najbliższa względem tego punktu. Wybór takiego rozwiązania jest dokonywany przez maksymalizację pewnej funkcji skalaryzującej $s(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})$, agregującej wszystkie kryteria w jedno kryterium syntetyczne. Funkcja ta, nazywana także **funkcją osiągnięcia zgodną z porządkiem** (*order-consistent achivement function*), powinna charakteryzować się pewnymi szczególnymi własnościami[1] tak, aby otrzymane rozwiązanie **z** miało następujące właściwości:

– jeżeli wybrany przez decydenta punkt aspiracji leży poza zbiorem osiągalnych wartości kryteriów, to otrzymane rozwiązanie $\hat{z}$ należy do zbioru rozwiązań Pareto-optymalnych i jest najbliższe z możliwych rozwiązań względem punktu aspiracji;
– jeżeli punkt aspiracji leży wewnątrz zbioru osiągalnych wartości kryteriów, wówczas otrzymane rozwiązanie $\hat{z}$ jest lepsze od punktu aspiracji i należy do zbioru rozwiązań Pareto-optymalnych;
– jeżeli punkt aspiracji znajduje się w zbiorze rozwiązań Pareto-optymalnych, to otrzymane rozwiązanie $\hat{z}$ jest równe punktowi aspiracji.

Dla przypadku maksymalizacji wszystkich kryteriów przykładowa funkcja skalaryzująca, spełniająca wymienione wymagania, przyjmuje postać:

$$s(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}) = \min_{0\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{z_j-\bar{z}_j}{u_j-\bar{z}_j}\right)+\rho\sum_{j=0}^{n}\frac{z_j-\bar{z}_j}{u_j-\bar{z}_j}. \tag{24}$$

Wektor $\mathbf{u}=(u_1,\dots u_j,\dots,u_n)$ jest tak zwanym **punktem utopijnym**. Składowe tego wektora przyjmują maksymalne wartości, jakie mogłyby przyjąć poszczególne kryteria, gdyby maksymalizowano je niezależnie od pozostałych, natomiast ρ jest parametrem przyjmującym małe wartości większe od zera[2].

Metoda punktu odniesienia doczekała się licznych modyfikacji. Jedna z nich, oprócz pojęcia punktu aspiracji, wprowadza dodatkowo pojęcie **punktu rezerwacji $\underline{\mathbf{z}}$**, które przyjęło się interpretować jako najgorsze rozwiązanie, które decydent jest jeszcze w stanie zaakceptować.

Dodatkowo, w celu standaryzacji miar poszczególnych kryteriów, dla każdego kryterium z_j wprowadza się jeszcze tzw. **cząstkowe funkcje osiągnięcia** η_j, które transformują zbiór wartości kryteriów z_j w zbiór poziomów satysfakcji, przy czym wyróżniono trzy typy cząstkowych funkcji osiągnięcia w zależności od tego, czy odpowiadające im kryteria są maksymalizowane, minimalizowane, czy

[1] *Po pierwsze, funkcja skalaryzująca powinna być właściwie monotoniczna względem każdego z kryteriów z_j w sensie dodatniego stożka D (patrz ciąg dalszy przypisu). Po drugie, w przypadku gdy punkt aspiracji należałby do zbioru rozwiązań niezdominowanych, wówczas funkcja skalaryzująca powinna nieliniowo separować ów zbiór od dodatniego stożka D, przesuniętego do tego punktu. Przy czym przez pojęcie dodatniego stożka D rozumie się zbiór punktów w przestrzeni kryteriów, które dla każdego z kryteriów przyjmują wartości nie mniejsze od zera. Powyższe dwie własności, nałożone na funkcję skalaryzującą rozważa się również w stosunku do dodatniego stożka rozwartego D_ε, zdefiniowanego jako zbiór punktów* $\mathbf{z}$ *w przestrzeni kryteriów, dla których* $\mathrm{dist}(\mathbf{z},D)<\varepsilon||\mathbf{z}||$.

[2] *Np.* $\rho=\frac{\varepsilon}{N}$ *(patrz poprzedni przypis).*

stabilizowane. W każdym z przypadków, funkcja osiągnięcia η_i zwraca tym większe wartości, im wartość kryterium w ocenie decydenta jest lepsza. W punkcie, w którym wartość kryterium z_j zrównuje się z punktem aspiracji $\overline{z}_j$, funkcja osiągnięcie η_i przyjmuje wartość równą 1. W punkcie, w którym wartość kryterium z_j zrównuje się z punktem rezerwacji $\underline{z}_j$, funkcja osiągnięcia η_j przyjmuje wartość równą 0. Decydent specyfikuje swoje preferencje, kształtując funkcję osiągnięcia, przez podawanie wartości punktu aspiracji $\overline{z}_j$ i rezerwacji $\underline{z}_j$, a w szczególnych przypadkach jeszcze dodatkowych punktów pośrednich.

Poniżej przedstawiono przykładowe postaci funkcji osiągnięcia dla kryteriów maksymalizowanych, minimalizowanych i stabilizowanych:

$$\eta_j^{\max}(z_j) = \begin{cases} \frac{\beta(z_j-\underline{z}_j)}{\overline{z}_j-\underline{z}_j} & \text{dla} \quad z_j < \underline{z}_j \\ \frac{z_j-\underline{z}_j}{\overline{z}_j-\underline{z}_j} & \text{dla} \quad \underline{z}_j \leqslant z_j \leqslant \overline{z}_j \\ 1+\frac{\alpha(z_j-\overline{z}_j)}{\overline{z}_j-\underline{z}_j} & \text{dla} \quad \overline{z}_j < z_j \end{cases},$$

$$\eta_i^{\min}(z_j) = \begin{cases} 1+\frac{\alpha(z_j-\overline{z}_j)}{\overline{z}_j-\underline{z}_j} & \text{dla} \quad z_j < \overline{z}_j \\ \frac{z_j-\underline{z}_j}{\overline{z}_j-\underline{z}_j} & \text{dla} \quad \overline{z}_j \leqslant z_j \leqslant \underline{z}_j \\ \frac{\beta(z_j-\underline{z}_j)}{\overline{z}_j-\underline{z}_j} & \text{dla} \quad \underline{z}_j < z_j \end{cases}, \tag{25}$$

$$\eta_j^{\text{stab}}(z_j) = \begin{cases} \frac{\beta(z_j-\underline{z}_j^1)}{\overline{z}_j^1-\underline{z}_j^1} & \text{dla} \quad z_j < \underline{z}_j^1 \\ \frac{z_j-\underline{z}_j^1}{\overline{z}_j^1-\underline{z}_j^1} & \text{dla} \quad \underline{z}_j^1 \leqslant z_j < \overline{z}_j^1 \\ 1+\frac{\alpha(z_j-\overline{z}_j^1)}{\overline{z}_j^1-\underline{z}_j^1} & \text{dla} \quad \overline{z}_j^1 \leqslant z_j < d_j \\ 1+\frac{\alpha(z_j-\overline{z}_j^2)}{\overline{z}_j^2-\underline{z}_j^2} & dla \quad d_j \leqslant z_j < \overline{z}_j^2 \\ \frac{z_j-\underline{z}_j^2}{\overline{z}_j^2-\underline{z}_j^2} & \text{dla} \quad \overline{z}_j^2 \leqslant z_j < \underline{z}_j^2 \\ \frac{\beta(z_j-\underline{z}_j^2)}{\overline{z}_j^2-\underline{z}_j^2} & \text{dla} \quad \underline{z}_j^2 \leqslant z_j \end{cases}.$$

Przyjmuje się tu założenie, że $0 < \alpha < 1$ oraz $\beta > 1$.

Funkcja skalaryzująca, wykorzystująca wprowadzone funkcje osiągnięcia przybiera następującą postać:

$$s(\mathbf{z},\eta) = \min_{0<j\leqslant n} \eta_j(z_j) + \rho \sum_{j=0}^{n} \eta_j(z_j). \tag{26}$$

Zastosowanie metody punktu odniesienia w jednokryterialnej grze przeciwko naturze

Przyjmuje się, że optymalizowanymi kryteriami z_j będą kryteria wyboru strategii w grach przeciwko naturze X_k opisane zależnościami (1)–(17). Kryteria te dzielą się na kryteria maksymalizowane (maksymalizujące jakąś zaagregowaną postać funkcji wypłaty) i kryteria minimalizowane (minimalizujące jakąś zaagregowaną postać funkcji straty). Przyjęta zostanie funkcja skalaryzująca postaci (26) z cząstkowymi funkcjami osiągnięcia postaci (25). Do konstrukcji optymalizowanych kryteriów z_j na podstawie poszczególnych kryteriów wyboru strategii X_k zostanie wykorzystana jedynie zawarta w tych kryteriach funkcja agregująca wartości wypłat (strat), z pominięciem operatora maksymalizacji (minimalizacji), stanowiącego narzędzie wyboru takiej strategii, dla której wartość tej funkcji jest największa (najmniejsza).

Poniżej przedstawiono postaci optymalizowanych kryteriów z_j dla wyróżnionych kryteriów wyboru strategii w grach przeciwko naturze;

- **kryteria maksymalizowane**:
  - kryterium Walda:

$$z_j(a_i) = \min_l V_l(a_i)\,; \tag{27}$$

  - kryterium optymistyczne:

$$z_j(a_i) = \max_l V_l(a_i)\,; \tag{28}$$

  - kryterium Laplace'a:

$$z_j(a_i) = \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} V_l(a_i)\,; \tag{29}$$

  - kryterium Hurwicza:

$$z_j(a_i) = \alpha \cdot \max_l V_l(a_i) + (1-\alpha)\cdot \min_l V_l(a_i)\,; \tag{30}$$

  - kryterium LNW:

$$z_j(a_i) = \sum_l \Phi(\widetilde{V}_l(a_i))\,, \tag{31}$$

gdzie:

$$\widetilde{V}_l(a_i) = V_{l\max} - V_l(a_i)\,, \tag{32}$$

$$V_{l\max} = \max_i V_l(a_i)\,, \tag{33}$$

$$\Phi(x) = \frac{\operatorname{sign}(-x)+1}{2}\,; \tag{34}$$

  - kryterium LNWP:

$$z_j(a_i) = \sum_l \cdot\Phi(\widetilde{V}_l(a_i), \rho, V_{l\max})\,, \tag{35}$$

gdzie ρ jest wartością względnego progu uznania, $\widetilde{V}_l(a_i)$ jest wyrażone zależnością (32), $V_{l\max}$ – zależnością (33), natomiast Φ wyraża się zależnością:

$$\Phi(x, \rho, x_{\max}) = \frac{\operatorname{sign}(\rho - \frac{x}{x_{\max}})+1}{2}\,; \tag{36}$$

  - kryterium SNWP:

$$z_j(a_i) = \sum_l V_l(a_i)\cdot\Phi(\widetilde{V}_l(a_i), \rho, V_{l\max})\,, \tag{37}$$

gdzie ρ jest wartością względnego progu uznania, $\widetilde{V}_l(a_i)$ jest wyrażone zależnością (32), $V_{l\max}$ – zależnością (33), natomiast Φ – zależnością (36);

– kryterium EWP:

$$z_j(a_i) = \sum_l V_l(a_i) \cdot \Psi(V_l(a_i), v), \tag{38}$$

gdzie v jest wartością bezwzględnego progu uznania, Ψ zaś jest zdefiniowane zależnością:

$$\Psi(x,v) = \frac{\mathrm{sign}(x-v)+1}{2}; \tag{39}$$

– kryterium PEW:

$$z_j(a_i) = \sum_k \sum_l V_l(a_i) \cdot \Psi(V_l(a_i), k \cdot v), \tag{40}$$

gdzie v jest wartością względnego progu uznania, Ψ zaś – zależnością (39);

- **kryteria minimalizowane**:

– kryterium Savage'a:

$$z_j(a_i) = \max_l \widetilde{V}_l(a_i), \tag{41}$$

gdzie $\widetilde{V}_l(a_i)$ jest wyrażone zależnością (32);

– kryterium ESP:

$$z_j(a_i) = \sum_l \widetilde{V}_l(a_i) \cdot \Psi(\widetilde{V}_l(a_i), v), \tag{42}$$

gdzie $\widetilde{V}_l(a_i)$ jest wyrażone zależnością (32), Ψ zaś – zależnością (39);

– kryterium PES:

$$z_j(a_i) = \sum_k \sum_l \widetilde{V}_l(a_i) \cdot \Psi(\widetilde{V}_l(a_i), k \cdot v), \tag{43}$$

gdzie v jest wartością bezwzględnego progu uznania, $\widetilde{V}_l(a_i)$ jest wyrażone zależnością (32), Ψ zaś – zależnością (39).

Zastosowanie metody punktu odniesienia w procesie wyboru strategii w jednokryterialnej grze rynkowej, modelowanej w formie gry przeciwko naturze, zostanie przedstawione w przykładzie 3.

Przykład 3

Sytuacja decyzyjna jest taka, jak w przykładzie 1. Macierz wypłat operatora A jest zilustrowana w tablicy 5, a odpowiadająca jej macierz strat[1] – w tablicy 6.

Tabl. 5. Macierz wypłat operatora** A **w grze o zysk na rynku telefonicznych usług lokalnych

Strategie	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8
a_1	6	5	4	7	5	4	3	6
a_2	8	4	3	5	7	3	2	4
a_3	7	6	3	6	6	4	2	5
a_4	5	6	6	7	4	5	5	6

Tabl. 6. Macierz strat operatora** A **w grze o zysk na rynku telefonicznych usług lokalnych

Strategie	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8
a_1	2	1	2	0	2	1	2	0
a_2	0	2	3	2	0	2	3	2
a_3	1	0	3	1	1	1	3	1
a_4	3	0	0	0	3	0	0	0

[1] *Elementami macierzy strat są wartości funkcji straty $\widetilde{V}_l(a_i)$ liczone dla poszczególnych wartości oryginalnej macierzy wypłat.*

Zakłada się, że operator A ocenia swoje decyzje z punktu widzenia trzech kryteriów:

– kryterium Walda:

$$z_1 = \min_j V_j(a_i)\,; \tag{44}$$

– kryterium optymistycznego:

$$z_2 = \max_j V_j(a_i)\,; \tag{45}$$

– kryterium Savage'a:

$$z_3 = \max_j \widetilde{V}_j(a_i)\,. \tag{46}$$

Zgodnie z ich istotą, kryteria z_1 i z_2 należą do grupy kryteriów maksymalizowanych, kryterium z_3 zaś należy do grupy kryteriów minimalizowanych. W tablicy 7 zilustrowano wartości poszczególnych

Tabl. 7. Wartości poszczególnych kryteriów z_j dla każdej strategii operatora A

Strategie	z_1	z_2	z_3
a_1	3	7	2
a_2	2	8	3
a_3	2	7	3
a_4	4	7	3

kryteriów z_j dla każdej z czterech strategii operatora A. Ustalone zostaną następujące wartości parametrów cząstkowych funkcji osiągnięcia $\alpha = 0,5$; $\beta = 1,5$. Dla uproszczenia zostanie przyjęte, że reprezentujący operatora A decydent steruje wyłącznie punktem aspiracji $\bar{\mathbf{z}}$, a wartość punktu rezerwacji $\underline{\mathbf{z}}$ jest ustalona na najgorszych dopuszczalnych wartościach danego kryterium. Otrzymuje się zatem:

– dla kryteriów maksymalizowanych z_1 i z_2:

$$\underline{z}_1 = \min_i z_1(a_i) = 2,$$

$$\underline{z}_2 = \min_i z_2(a_i) = 7\,;$$

– dla minimalizowanego kryterium z_3:

$$\underline{z}_3 = \max_i z_3(a_i) = 3\,.$$

Wartości cząstkowych funkcji osiągnięcia η_j dla różnych wartości poziomów aspiracji $\bar{z}_j$ zostaną wyznaczone z zależności (25). W tablicach 8, 9 i 10 zilustrowano wartości funkcji osiągnięcia liczone dla każdej ze strategii operatora A dla trzech przykładowo wybranych wartości poziomów aspiracji $\bar{z}_j$ i założonych poziomach rezerwacji $\underline{z}_1 = 2$, $\underline{z}_2 = 7$ i $\underline{z}_3 = 3$.

Punkt aspiracji jest wektorem, składającym się z poszczególnych poziomów aspiracji $\bar{\mathbf{z}} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$, wyrażającym preferencje operatora odnośnie do satysfakcjonujących wartości poszczególnych kry-

Tabl. 8. Wartości cząstkowej funkcji osiągnięcia η_1
dla trzech wartości poziomu aspiracji
kryterium $\bar{z}_1$ ***(Walda), dla poszczególnych***
strategii operatora A

Strategie	$\bar{z}_1 = 3$	$\bar{z}_1 = 4$	$\bar{z}_1 = 5$
a_1	1	0,5	0,333
a_2	0	0	0
a_3	0	0	0
a_4	2	1	0,667

Tabl. 9. Wartości cząstkowej funkcji osiągnięcia η_2
dla trzech wartości poziomu aspiracji
kryterium $\bar{z}_2$ ***(optymistycznego), dla poszczególnych***
strategii operatora A

Strategie	$\bar{z}_2 = 7,5$	$\bar{z}_2 = 8$	$\bar{z}_2 = 8,5$
a_1	0	0	0
a_2	2	1	0,667
a_3	0	0	0
a_4	0	0	0

Tabl. 10. Wartości cząstkowej funkcji osiągnięcia η_3
dla trzech wartości poziomu aspiracji
kryterium $\bar{z}_3$ ***(Savage'a), dla poszczególnych***
strategii operatora A

Strategie	$\bar{z}_3 = 2,5$	$\bar{z}_3 = 2$	$\bar{z}_3 = 1,5$
a_1	2	1	0,667
a_2	0	0	0
a_3	0	0	0
a_4	0	0	0

teriów. Punkt rezerwacji jest wektorem, składającym się z poszczególnych poziomów rezerwacji $\underline{\mathbf{z}} = (\underline{z}_1, \underline{z}_2, \underline{z}_3)$, wyrażającym preferencje operatora odnośnie do akceptowalnych wartości poszczególnych kryteriów. Maksymalizacja skalaryzującej funkcji osiągnięcia $s(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{z}})$ postaci (26) umożliwia wyłonienie strategii a_i operatora A, która jest najbliższa spełnieniu tych wymagań lub spełnia je w stopniu najlepszym.

W tablicy 11 zilustrowano wartości funkcji skalaryzującej dla przykładowych wartości punktów aspiracji $\bar{\mathbf{z}}$ i rezerwacji $\underline{\mathbf{z}}$, dla każdej z rozważanych przez operatora A strategii. W pierwszej kolumnie przedstawiono wartości funkcji skalaryzującej dla punktu aspiracji $\bar{\mathbf{z}} = (3; 7,5; 2)$. Punkt rezerwacji, zgodnie z początkowym założeniem, ustawiono na najgorsze dopuszczalne wartości poszczególnych kryteriów $\underline{\mathbf{z}} = (2; 7; 3)$. Dla tak dobranych punktów aspiracji i rezerwacji strategie a_1, a_2 i a_4 są najlepszymi i wzajemnie nierozróżnialnymi decyzjami operatora A (wartość funkcji skalaryzującej wynosi dla nich $0,2$ i jest największą wartością w kolumnie). Jeśli operator zwiększy poziom aspiracji dla kryterium Walda do wartości $z_1 = 4$ (druga kolumna w tabl. 11), wówczas jednoznacznie

Tabl. 11. Wartości skalaryzującej funkcji osiągnięcia $s(\mathbf{z}, \overline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{z}})$
dla czterech wybranych punktów odniesienia

Strategie	$\overline{\mathbf{z}} = (3;7,5;2)$ $\underline{\mathbf{z}} = (2;7;3)$	$\overline{\mathbf{z}} = (4;7,5;2)$ $\underline{\mathbf{z}} = (2;7;3)$	$\overline{\mathbf{z}} = (3;7,5;2,5)$ $\underline{\mathbf{z}} = (2;7;3)$	$\overline{\mathbf{z}} = (4;8,5;2,5)$ $\underline{\mathbf{z}} = (2;7;5)$
a_1	$\mathbf{0,2}$	0,15	$\mathbf{0,3}$	0,17
a_2	$\mathbf{0,2}$	$\mathbf{0.2}$	0,2	0,15
a_3	0	0	0	0
a_4	$\mathbf{0,2}$	0,1	0,2	$\mathbf{0,18}$

zostanie wyłoniona strategia a_2 z wartością funkcji skalaryzującej równą $0,2$. Jeśli zaś operator A zwiększy (względem punktu początkowego) wartość poziomu aspiracji dla kryterium Savage'a do wartości $z_3 = 2,5$, wówczas jednoznacznie zostanie wyłoniona strategia a_1, dla której wartość funkcji skalaryzującej wynosi $0,3$ (trzecia kolumna w tabl. 11). Strategię a_4 operator może uzyskać, zmieniając jednocześnie punkt aspiracji i rezerwacji (czwarta kolumna w tabl. 11).

Koncepcja operatora najbardziej obiecującego

Traktowanie konkurencyjnych graczy jako naturę, o której nic ponad znajomość jej dopuszczalnych strategii się nie wie, stanowi podejście niewątpliwie „tanie”, ale obarczone dużym ryzykiem błędu①. Ryzyko to jest mniejsze w przypadku znajomości macierzy wypłat graczy konkurencyjnych②. Teraz można zastosować nieco inne podejście do problemu minimalizacji ryzyka błędu. Podejście to opiera się na minimalizacji liczby dopuszczalnych strategii natury, przez ustalenie decyzji jednego lub większej liczby graczy. Znajomość decyzji choćby jednego z konkurentów zmniejsza liczbę dopuszczalnych strategii natury w sposób radykalny. Dla przykładu, jeśli natura, reprezentująca zbiór wszystkich konkurentów gracza A miała $||\mathcal{I}_N||$ dopuszczalnych strategii gry, to poznanie przez A decyzji konkurenta B zmniejsza liczbę dopuszczalnych strategii natury do wartości $\frac{||\mathcal{I}_N||}{||\mathcal{I}_B||}$, gdzie $||\mathcal{I}_B||$ jest liczbą dopuszczalnych strategii gracza B. W ten sposób wyłania się pierwsze kryterium, na podstawie którego można wskazać tego z graczy konkurencyjnych, którego decyzję warto poznać w pierwszej kolejności. Kryterium tym jest liczba dopuszczalnych strategii. Im więcej

① *Dopiero skutki takich błędów mogą wskazać , jak w rzeczywistości „drogie” może być takie podejście.*

② *Ściślej, jest niemożliwe, aby w przypadku braku informacji o macierzy wypłat konkurencyjnych graczy ocenić trafność podjętej decyzji i to nawet po fakcie poznania odpowiedzi graczy konkurencyjnych na własne decyzje. Wynika to z tego, że nie znając macierzy wypłat konkurentów, dany gracz nie jest w stanie odpowiedzieć na pytanie, co by było, gdyby wybrał inną strategię. Gracz nie wie, jaka wówczas byłaby odpowiedź konkurentów, a więc nie ma punktu odniesienia dla aktualnego rozwiązania gry. Ten moment nakreśla wyraźną różnicę między typową grą przeciwko naturze, w której natura postępuje w sposób niezależny od decyzji gracza, a opisywanym przypadkiem, gdzie decyzja natury jest racjonalną odpowiedzią na tę decyzję.*

dany gracz ma strategii dopuszczalnych, tym informacja o jego decyzji silniej minimalizuje prawdopodobieństwo błędnej decyzji.

Drugie kryterium, na podstawie którego można wskazać konkurencyjnego gracza, znajomość decyzji którego jest dla danego gracza najbardziej korzystna, opiera się na koncepcji operatora najbardziej obiecującego [8].

Sformułowanie problemu

Jest trzech operatorów A, B i C, z których każdy ma do dyspozycji dwie strategie. Z punktu widzenia operatora A, który zna macierz swoich wypłat (tablica 12), lecz nie zna macierzy wypłat pozostałych operatorów, pozostali gracze mogą być traktowani jak natura.

Tabl. 12. Macierz wypłat operatora A: sytuacja trzech operatorów A, B i C

Strategie	c_1		c_2	
	b_1	b_2	b_1	b_2
a_1	3	2	4	2
a_2	2	3	1	3

Jeżeli operator A podejmuje swoją decyzję odnośnie do wyboru strategii na podstawie kryterium Walda (19), to wybierze strategię a_1, zapewniającą mu wypłatę równą co najmniej 2. Dalej zostanie rozpatrzona sytuacja, gdy operator A zna strategię jednego z operatorów B lub C.

Znana jest decyzja operatora B. Jeśli operator B wybierze strategię b_1, to minimalna wypłata, jaką może sobie zagwarantować operator A, wynosi 3 (strategie a_1-b_1-c_1). Jeśli zaś B wybierze strategię b_2, to minimalna wypłata, jaką może sobie zagwarantować operator A, wynosi również 3 (strategie a_2-b_2-c_1 lub a_2-b_2-c_2). Tak więc w najgorszym przypadku (na tym opiera się kryterium Walda), poznanie decyzji operatora B zapewni operatorowi A przyrost wypłaty wyliczonej na podstawie kryterium Walda o 1 ($3 - 2 = 1$).

Znana jest decyzja operatora C. Jeśli operator C wybierze strategię c_1, to minimalna wypłata, jaką może sobie zagwarantować operator A, wynosi 2 (strategie a_1-b_2-c_1 lub a_2-b_1-c_1). Jeśli C wybierze strategię c_2, to minimalna wypłata, jaką może sobie zagwarantować operator A, wynosi również 2 (strategie a_1-b_2-c_2). Tak więc zgodnie z kryterium Walda, poznanie decyzji operatora C nie zapewni operatorowi A wzrostu wartości wypłaty ($2 - 2 = 0$).

Wynika stąd wniosek, że zgodnie z kryterium Walda, poznanie decyzji operatora B jest korzystniejsze dla operatora A niż poznanie decyzji operatora C[①]. Informacja o decyzji, jaką zamierza podjąć operator B, jest zatem – zgodnie z kryterium Walda – **informacją krytyczną** dla operatora A, a operator B zostanie nazwany **operatorem najbardziej obiecującym** dla operatora A [8].

① *Decyzja operatora C jest tu w ogóle nieistotna, nie gwarantuje bowiem żadnej poprawy minimalnej wypłaty.*

Definiacja ogólna

Przed sformułowaniem definicji operatora najbardziej obiecującego zostaną wprowadzone następujące oznaczenia:

SQ_A^X – (*status quo*) aktualnie wyliczona wypłata dla operatora A na podstawie kryterium wyboru strategii X;

KD_{AO}^X – (*known decision of operator O*) wypłata operatora A wyliczona na podstawie kryterium X przy znajomości decyzji operatora O;

VI_{AO}^X – (*value of information*) wartość informacji dla operatora A odnośnie do decyzji operatora O wyliczona na podstawie kryterium X.

Wartość informacji o decyzji operatora O zostanie wyznaczona jako wartość bezwzględna[①] z różnicy między KD_{AO}^X i SQ_A^X:

$$VI_{AO}^X = |KD_{AO}^X - SQ_A^X|. \tag{47}$$

Definicja 3. Operatorem najbardziej obiecującym ($operatorem\_NO_A^X$), zgodnie z kryterium X, dla operatora A nazywa się operatora, dla którego współczynnik VI_{AO}^X, wyliczony z punktu widzenia operatora A, przyjmuje wartość największą:

$$operator\_NO_A^X = \arg\max_{O \neq A} VI_{AO}^X. \tag{48}$$

Sposób wyznaczania wartości współczynników SQ_A^X i KD_{AO}^X zależy od przyjętego kryterium wyboru strategii X. W przypadku kryterium Walda można przyjąć[②]:

$$SQ_A^{Wald} = \max\{\min_{j,k} V_{jk}^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{49}$$

$$KD_{AB}^{Wald} = \min_j KD_{ABj}^{Wald}, \tag{50}$$

gdzie:

$$KD_{ABj}^{Wald} = \max\{\min_k V_{jk}^A(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{51}$$

Operator najbardziej obiecujący, zgodnie z jednym kryterium, może nie być takim, w przypadku innego kryterium.

Przy uwzględnianiu wielu kryteriów wyboru strategii X, do wyznaczenia operatora najbardziej obiecującego można zastosować metodę punku odniesienia, wówczas za optymalizowane kryteria oceny z_j należy podstawić funkcję wartości informacji VI_{OA}^X, wyliczoną na podstawie kryterium X. Sterowanie punktami aspiracji i/lub rezerwacji będzie odpowiadać określaniu satysfakcjonującego i/lub akceptowalnego poziomu wartości informacji VI_{OA}^X, wyliczonej zgodnie z kryterium X dla

① *W zależności od tego, czy kryterium X należy do grupy kryteriów maksymalizowanych, czy minimalizowanych, różnica ta będzie większa lub mniejsza od zera. Zachodzą bowiem zależności: $KD_{AO}^X \geqslant SQ_A^X$ dla kryteriów maksymalizowanych (od (27) do (40)) oraz $KD_{AO}^X \leqslant SQ_A^X$ dla kryteriów minimalizowanych (od (41) do (43)).*

② *Na temat sposobu wyznaczania wartości współczynników SQ_A^X i KD_{AO}^X dla innych kryteriów patrz [8, 13].*

operatora O. Operatorem najbardziej obiecującym będzie wówczas ten, dla którego (przy ustalonych poziomach aspiracji i rezerwacji[1]) otrzyma się największą wartość funkcji skalaryzującej $s(\mathbf{z},\eta)$ (26).

Użyteczność koncepcji

Wartość informacji VI_{AO}^{X} określa maksymalny poziom kosztu, jaki zgodnie z kryterium X opłaca się operatorowi A ponieść, aby pozyskać informację[2] o strategii gry wybranej przez operatora O[3]. Należy jednakże podkreślić, że nie ma pewności osiągnięcia wyniku lepszego od poniesionego kosztu, bowiem wartość ta jest liczona nie w sensie bezwzględnym, ale w sensie określonego kryterium wyboru strategii X. Dla przykładu, jeśli wartość informacji jest liczona zgodnie z kryterium wartości oczekiwanej (Laplace'a), wówczas VI_{AO}^{Lap} określa średnią (oczekiwaną) wartość informacji o decyzji operatora O. Konkretna decyzja może jednak mieć dla operatora A wartość zarówno większą, jak i mniejszą od VI_{AO}^{Lap}.

Wartość informacji VI_{AO}^{X} może stanowić też wskaźnik, określający poziom naturalnej zachęty dla operatora A do wejścia w koalicję[4] z operatorem O. Im silniejszy wpływ na wyniki operatora A mają decyzje operatora O, tym większa zachęta dla A, aby te decyzje poznać, a tym bardziej, aby mieć na nie wpływ. Wskaźnik ten może być użyteczny również dla regulatora rynku, śledzącego strategiczne posunięcia graczy i odpowiedzialnego za promowanie konkurencyjnej formy rynku. Aby tak być mogło, regulator ten musi znać macierz wypłat operatora A, co w większości przypadków oznacza znajomość jego modelu kosztów. W praktyce jest to jednakże wyzwanie niebagatelne [2, 6, 16, 18, 20, 22, 23, 28, 30].

Wybór strategii gry w przypadku istnienia rekomendowanych stawek rozliczeniowych na rynku hurtowym

Ceny na rynku detalicznym są ustalane przez danego operatora oraz pozostają pod pełną i prawie wyłączną jego kontrolą[5]. Ceny na rynku hurtowym, poza przypadkami arbitrażowych rozwiązań, są negocjowane, a więc ustalane między przedsiębiorstwami. W komentarzu do przykładu 1 zasugerowano, że stosując metody wspomagania decyzji w grach przeciwko naturze, można przyjąć, że ceny na rynku hurtowym (jeśli są nieznane w momencie ustalania cen na rynku detalicznym) można traktować jako dopuszczalne strategie dodatkowego, hipotetycznego gracza H (przykład 2). Rozpatrywanie możliwych wyników negocjacji cen na rynku hurtowym jako strategii hipotetycznego gracza H, które na jednakowych zasadach co strategie gracza B zostają włączone do strategii natury, nie uwzględnia jednak faktu, że operatorom przysługuje swoiste *veto* w negocjacjach cen na rynku hurtowym. W przypadku fiaska w negocjacjach operatorzy mogą się spodziewać arbitrażu regulatora. Stawki

[1] *Aby porównania wartości funkcji skalaryzujących dla poszczególnych operatorów były miarodajne, należy ich dokonywać przy jednakowych wartościach punktów aspiracji i rezerwacji.*

[2] *Sposób pozyskania tego typu informacji nie jest zagadnieniem trywialnym i to zarówno z punktu widzenia technicznego, jak i etycznego czy prawnego. Najprostsze jest zwlekanie z podjęciem własnej decyzji, aż do momentu, w którym operator O podejmie decyzję. Szacunkowy koszt odwlekania decyzji jest wartością, którą należy porównywać z wartością informacji* VI_{AO}^{X}.

[3] *Na temat roli informacji o macierzy wypłat konkurencyjnych graczy patrz [12].*

[4] *Koalicja taka przybierać może bardzo różne formy, poczynając od umów nieformalnych, poprzez różne formy integracji poziomej lub pionowej (zależnie od zajmowanych rynków), na fuzji kończąc [1, 14]. Dyskusja na temat prawnej dopuszczalności tego typu koalicji i ich wpływu na poziom konkurencji na rynku wykracza poza zakres niniejszego artykułu (na ten temat patrz [5, 17, 19]).*

[5] *W przypadku słabo rozwiniętej konkurencji na rynku, regulacja prawna obejmuje niejednokrotnie również wysokość cen na rynku detalicznym, ograniczając możliwy zakres ich zmienności, a zatem i swobodę przedsiębiorstw w ich ustalaniu [17].*

rozliczeniowe rekomendowane przez regulatora są zwykle wcześniej znane. Możliwa jest również sytuacja, kiedy jeden z operatorów ma obowiązek przedstawiania tzw. oferty ramowej, w której są zawarte propozycje wysokości stawek rozliczeniowych. Operatorzy zawsze więc mogą założyć, że w wyniku negocjacji zostanie wybrana strategia odpowiadająca tym stawkom.

Przyjęte zostanie, że strategia hipotetycznego gracza H, oznaczona h^*, odpowiada stawkom rekomendowanym lub zawartym w ofercie ramowej. Ustalając swoje ceny na rynku detalicznym, operator A zawsze może założyć, że wynikiem negocjacji będzie wybranie strategii h^*. Wartość wypłaty, jaką A w ten sposób osiągnie, będzie dodatkowo zależeć od wysokości cen ustalonych na rynku detalicznym gracza B (strategii b_j). Należałoby określić, które spośród strategii h_l będą dla gracza A gorsze niż h^*, aby je wyeliminować. Można tego dokonać tylko przy założeniu ustalonej strategii a_i i to tylko w sensie probabilistycznym, przyjmując określoną formę agregacji niepewności związanej ze strategiami b_j gracza B (wyznaczenie wartości strategii h_l w sensie określonego kryterium wyboru strategii X). Przyjmując dla przykładu formę agregacji w postaci wartości oczekiwanej (kryterium Laplace'a), przy ustalonej strategii a_i, dla każdej strategii h_l można wyznaczyć jej wartość jako wartość oczekiwaną z wypłat gracza A po wszystkich strategiach gracza B:

$$V_{Ail}^{Lap} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} V_{jl}^{A}(a_i) : \forall i, l\,, \tag{52}$$

gdzie $V_{jl}^{A}(a_i)$ oznacza wartość wypłaty gracza A, gdy wybrał on strategię a_i, a gracz B wybrał strategię b_j, natomiast w wyniku negocjacji wybrano strategię h_l, V_{Ail}^{Lap} zaś oznacza wartość strategii h_l, wyznaczoną na podstawie kryterium Laplace'a, dla strategii a_i. Wartość strategii h^* wyniesie:

$$V_{Ai^*}^{Lap} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} V_{jl}^{A}(a_i) : \forall i, h_l = h^*\ . \tag{53}$$

Dla kryteriów, opierających się na macierzy strat można przyjąć, że wartość strategii będzie tym większa, im mniejszą stratę (wartość funkcji straty (6)) będzie gwarantowała ta strategia. Dla przykładu, w przypadku kryterium Savage'a wartość strategii h_l dla ustalonej strategii a_i wyznacza się z zależności:

$$V_{Ail}^{Sav} = -\max_{j} \widetilde{V}_{jl}^{A}(a_i) : \forall i, l\ , \tag{54}$$

gdzie $\widetilde{V}_{jl}^{A}(a_i)$ oznacza wartość straty (korzyści utraconej), jaką ponosi gracz A w sytuacji, gdy wybierze strategię a_i, a gracz B – strategię b_j,w wyniku negocjacji zaś zostanie wybrana strategia h_l.

Wypada rozpatrzyć, czy powyższe zależności są zatem bezużyteczne, gdy jeszcze nie podjęto decyzji o wyborze strategii a_i. Inaczej mówiąc, czy w procesie wyboru strategii a_i nie można wspomóc gracza A przez odrzucenie strategii gorszych od h^*, za gorszą bowiem od h^* można uznać daną strategię h_l jedynie przy ustalonej już strategii a_i. Choć faktycznie nie można porównywać strategii h_l (poza przypadkami dominacji) w oderwaniu od strategii a_i, to powyższe zależności okażą się przydatne.

Z punktu widzenia gracza A problem można sprowadzić do analizy macierzy, w której wiersze będą odpowiadały jego strategiom a_i, kolumny zaś strategiom h_l, natomiast elementami macierzy będą wartości V_{Ail}^{X} (patrz tabl. 13). Jedną ze strategii h_l jest tu rekomendowana strategia h^*. Strategia h^* jest dla gracza A tą, która zawsze może zostać wybrana, pozostałe zaś strategie h_l są tak samo możliwe, jak i niemożliwe do osiągnięcia[1]. Problem więc można sprowadzić do sytuacji, gdy hipotetyczny

[1] *Z uwagi na brak informacji o macierzy wypłat gracza B można przyjąć, że prawdopodobieństwo zdarzenia, że strategia $h_l \neq h^*$ jest dla gracza B dopuszczalna (nie gorsza dla danego a_i od strategii h^*), jest równe* $0{,}5$.

Tabl. 13. Macierz wartości strategii h_l

Strategie	$h_1 = h^*$	h_2	h_3	h_4
a_1			$\vdots$	
a_2	$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$\mathbf{V}^X_{A23}$	$\ldots\ldots$
a_3			$\vdots$	
a_4			$\vdots$	

gracz H ma wyłącznie dwie strategie: zawsze możliwą do wybrania strategię h^* oraz strategię $\overline{h}$, będącą agregatem, na podstawie kryterium X[1] pozostałych strategii $h_l \neq h^*$, jednak tylko tych, dla których zachodzi zależność[2]:

$$V^X_{Ail} \geqslant V^X_{Ai^*} . \tag{55}$$

W sytuacji gdy dla danego a_i nie istnieją strategie h_l nie gorsze niż h^*, wówczas można przyjąć, że strategia $\overline{h}$ jest tożsama ze strategią h^* (tak w sensie jej wartości, jak i prawdopodobieństwa wyboru).

Wartość strategii $\overline{h}$, postrzegana z punktu widzenia gracza A dla określonej strategii a_i, przy przyjęciu za X kryterium Laplace'a, wyniesie:

$$\overline{V}^{Lap}_{Ai} = \frac{1}{L_{i*}} \sum_{l=1, V^{Lap}_{Ail} \geqslant V^{Lap}_{Ai^*}}^{L} V^{Lap}_{Ail} : \forall i \, , \tag{56}$$

gdzie L_{i*} oznacza liczbę strategii h_l wchodzących w skład strategii $\overline{h}$ dla strategii a_i. Wyniesie ona:

– dla kryterium Walda:

$$\overline{V}^{Wal}_{Ai} = \min_{l, V^{Wal}_{Ail} \geqslant V^{Wal}_{Ai^*}} V^{Wal}_{Ail} : \forall i ; \tag{57}$$

– dla kryterium optymistycznego:

$$\overline{V}^{Opt}_{Ai} = \max_{l, V^{Opt}_{Ail} \geqslant V^{Opt}_{Ai^*}} V^{Opt}_{Ail} : \forall i ; \tag{58}$$

[1] *Możliwe jest wybranie innego kryterium agregującego, względem wcześniej wybieranych. Mogą jednak powstać problemy interpretacyjne.*

[2] *Można zapytać, czy nie byłoby rozsądniej i prościej rozważać tylko te strategie* h_l*, dla których* $V^X_{Ail} > V^X_{Ai^*}$*, czy jest sens targowania się o rozwiązanie, które nie przyniesie większych korzyści? Aby na to pytanie odpowiedzieć, należy rozpatrzyć co najmniej trzy kwestie. Po pierwsze, strategia* h_l*, dla której* $V^X_{Ail} = V^X_{Ai^*}$ *w jednej grze (np. o zysk), może mieć już inną wartość – potencjalnie lepszą – w innej grze (np. o liczbę abonentów). Po drugie, strategia* h_l *może się okazać korzystniejsza od strategii* h^* *dla gracza B. Wybór strategii* h_l *będzie wówczas swoistym „powiększeniem ciastka", którym gracze między sobą mają się dzielić [3, 24]. Różnica wartości strategii* h_l *i* h^* *dla gracza B określa wartość nadwyżki korzyści, którą gracze mogą się wzajemnie podzielić. Trzecia kwestia jest związana z aspektem kolejności ruchów graczy. W przypadku, gdy zanim dojdzie do negocjacji stawek rozliczeniowych, gracz B ustali swoje ceny na rynku detalicznym, wartość strategii* h_l *może się okazać większa od wartości strategii* h^* *(w przypadku, gdy są ustalone już strategie* a_i *i* b_j*, wartość strategii* h_l *nie wyraża się wtedy w formie agregatu opartego na określonym kryterium wyboru strategii X, lecz jest konkretną wartością wypłaty, zależną od wybranych* a_i *oraz* b_j*).*

– dla kryterium Savage'a[1]:

$$\overline{V}_{Ai}^{Sav} = \min_{l, V_{Ail}^{Sav} \geqslant V_{Ai*}^{Sav}} V_{Ail}^{Sav} : \forall i\,. \tag{59}$$

W sposób analogiczny wyznacza się wartość strategii h_l dla pozostałych kryteriów X.

Prawdopodobieństwo, że strategia h_l ma przy ustalonej strategii a_i dla gracza B większą wartość aniżeli strategia h^*, wyraża się przez p_{il}^B. W przypadku nieznajomości macierzy wypłat gracza B można przyjąć, że $p_{il}^B = 0,5$. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że żadna ze strategii wchodzących w skład strategii $\overline{h}$ nie będzie dla gracza B lepsza niż h^*, jest równe iloczynowi prawdopodobieństw $(1 - p_{il}^B)$. Stąd można wyznaczyć prawdopodobieństwo $p_{i\overline{h}}$ osiągalności strategii $\overline{h}$ (osiągalności wartości $\overline{V}_{Ai}^X$) dla każdej strategii a_i:

$$p_{i\overline{h}} = 1 - \prod_{l, V_{Ail}^X \geqslant V_{Ai*}^X} (1 - p_{il}^B) : \forall i\,, \tag{60}$$

co w przypadku nieznajomości macierzy wypłat gracza B można zapisać jako:

$$p_{i\overline{h}} = 1 - 0,5^{L_{i*}} : \forall i\,. \tag{61}$$

Sytuacja decyzyjna upraszcza się teraz do rozstrzygnięcia, którą spośród strategii a_i wybrać, wiedząc, że każda z nich daje pewną wartość V_{Ai*}^X i prawdopodobną, z prawdopodobieństwem $p_{i\overline{h}}$, wartość $\overline{V}_{Ai}^X$. Problem ten można potraktować jako problem wielokryterialny, a do jego rozwiązania zastosować opisaną metodę punktu odniesienia. Optymalizowanymi kryteriami z_j mogą tu być dla przykładu:

- $z_j = V_{Ai*}^X$ – wartość strategii h^* (kryterium maksymalizowane);
- $z_j = \overline{V}_{Ai}^X$ – wartość strategii $\overline{h}$ (kryterium maksymalizowane);
- $z_j = p_{i\overline{h}}$ – prawdopodobieństwo osiągalności strategii $\overline{h}$ dla ustalonej strategii a_i (kryterium maksymalizowane);
- $z_j = p_{i\overline{h}} \cdot \overline{V}_{Ai}^X$ – wartość oczekiwana wartości strategii $\overline{h}$ (kryterium maksymalizowane);
- $z_j = V_{Ai*} + p_{i\overline{h}} \cdot \overline{V}_{Ai}^X$ – wartość oczekiwana wypłaty (liczonej w sensie kryterium X) przy wyborze strategii a_i (kryterium maksymalizowane).

Jest możliwe również stosowanie podejścia prostszego – dwukryterialnego. Wybierając dwa kryteria oceny, np. wartość strategii h^* ($z_1 = V_{Ai*}^X$) oraz wartość oczekiwaną wypłaty przy wyborze strategii a_i ($z_2 = V_{Ai*} + p_{i\overline{h}} \cdot \overline{V}_{Ai}^X$), ustala się wartość progową jednego z kryteriów, a następnie spośród strategii a_i, dla których to ograniczenie jest spełnione – wybiera się tę, która ma najlepszą wartość drugiego kryterium [15]. To ostatnie podejście zostanie przedstawione w przykładzie 4.

Przykład 4

Operator A zamierza wprowadzić na rynek nową ofertę usługową, a wraz z nią nowy pakiet cen dla klientów detalicznych. Jest rozważana możliwość wprowadzenia jednej z trzech strategii ceno-

[1] *Dla kryterium Savage'a oraz dla pozostałych kryteriów operujących na macierzy strat dana strategia h_l ma wartość tym większą, im mniejszą daje wartość straty.*

wych: a_1, a_2 i a_3. W niedługim czasie ma nastąpić renegocjacja umowy o połączeniach międzysieciowych z operatorem B, który również szykuje się do wprowadzenia nowej oferty usługowej. Znane są rekomendowane przez regulatora stawki rozliczeniowe za połączenia międzysieciowe (strategia $h_1 = h^*$). Operator A rozważa możliwość zaakceptowania dodatkowo dwóch różnych struktur wysokości stawek rozliczeniowych (strategie h_2 i h_3). Na podstawie przeprowadzonych analiz i wywiadu operator A przewiduje, że operator B przyjąć może jedną z trzech możliwych ofert usługowych – b_1, b_2 i b_3. Sytuacja pozostałych konkurencyjnych operatorów jest ustabilizowana i A nie przewiduje w najbliższym czasie istotnych zmian w ich ofercie oraz zasadach wzajemnej współpracy. Obaj operatorzy A i B dążą do szybkiej maksymalizacji zysku. Operator A nie zna modelu kosztów operatora B. Na podstawie modelu popytu i modelu kosztów operatora A, dla wszystkich możliwych kombinacji strategii na rynkach detalicznych i na rynku hurtowym obliczono wartość spodziewanego zysku operatora A (tabl. 14).

Tabl. 14. Macierze wypłat gracza A

Strategie	$h_1 = h^*$			h_2			h_3		
	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3
a_1	2	4	6	6	5	8	6	7	6
a_2	5	4	3	6	6	7	3	4	5
a_3	4	4	4	2	3	4	5	4	6

Przy założeniu, że operator A w swej decyzji kieruje się kryterium Walda postaci

$$\max\{\min_{j,l} V_{jl}^{A}(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{62}$$

należy rozpatrzyć, którą ze strategii a_i powinien wybrać operator A?

Jeżeli pominąć fakt, że strategia $h_1 = h^*$ może zostać w trakcie negocjacji zawsze wybrana, wówczas na podstawie kryterium Walda widać, że operator A wybierze strategię a_2, zapewniając sobie wypłatę równą co najmniej 3. Przy rozważaniu sytuacji z możliwością wyboru strategii $h_1 = h^*$ trzeba obliczyć wartości poszczególnych strategii h_l, zgodnie z zależnością:

$$V_{Ail}^{Wal} = \min_j V_{jl}^{A}(a_i) : \forall i,l\,. \tag{63}$$

W tablicy 15 zilustrowano wartości poszczególnych strategii h_l. Po agregacji strategii h_2 i h_3 uzyskuje się strategię $\overline{h}$.

Tabl. 15. Macierz wartości strategii $h_1 = h^*$**,** h_2 **i** h_3**, wyliczonych na podstawie kryterium Walda** V_{Ail}^{Wal}

Strategie	h^*	h_2	h_3
a_1	2	5	6
a_2	3	6	3
a_3	4	2	4

Wartość strategii $\overline{h}$ wyznacza się z zależności:

$$\overline{V}_{Ai}^{Wal} = \min_{l, V_{Ail}^{Wal} \geqslant V_{Ai*}^{Wal}} V_{Ail}^{Wal} : \forall i, h_l \neq h^* \,. \tag{64}$$

W tablicy 16 przedstawiono wartości strategii h^* i $\overline{h}$ dla każdej strategii a_i operatora A, a także prawdopodobieństw $p_{i\overline{h}}$ przy założeniu, że prawdopodobieństwo zdarzenia, że strategia h_l jest dla gracza B lepsza niż strategia h^*, wynosi $p_{il}^B = 0,5$.

Tabl. 16. Macierz wartości strategii h^* i $\overline{h}$, wyliczonych na podstawie kryterium Walda

Strategie	h^*	$\overline{h}$	$p_{i\overline{h}}$
a_1	2	5	0,75
a_2	3	3	0,75
a_3	4	4	0,5

Z analizy wartości strategii h^* i $\overline{h}$, podanych w tabl. 16, można wnioskować, że przy uwzględnieniu faktu, że strategia h^* może zawsze zostać wybrana, strategia a_2 nie jest najlepsza w sensie kryterium Walda. Lepsza od niej jest strategia a_3, dająca pewną wartość 4 (wartość zawsze możliwej do wybrania strategii h^*). Strategia ta dominuje strategię a_2 (strategia a_2 nigdy nie powinna zostać wybrana). Wybór strategii a_1 nastąpi dla przykładu wówczas, gdy operator A swoją decyzję oprze na procedurze ustalenia progowej wartości strategii h^* na poziomie równym 2, a następnie maksymalizacji wartości strategii $\overline{h}$ (lub jej wartości oczekiwanej).

Podsumowanie

Zaprezentowane narzędzia, wspomagające decyzje graczy rynkowych dotyczące wysokości cen za usługi telekomunikacyjne w sytuacji konkurencji, operują na macierzy wypłat, opartej na modelu popytu na świadczone usługi i/lub modelu ponoszonych z tego tytułu kosztów. Ich rzeczywista użyteczność wskazuje, że nie powinni oni kierować się wyłącznie analizą kosztów ponoszonych w procesie ustalania cen za usługi telekomunikacyjne [11]. Modelowanie i analiza popytu na usługi telekomunikacyjne [10] w połączeniu z analizą kosztów świadczenia tych usług umożliwia bardziej skuteczne działanie na rynku.

Bibliografia

[1] Borucki W., Klama M.: *Wybrane alianse operatorów telekomunikacyjnych*. W: Materiały z Krajowego Sympozjum Telekomunikacyjnego KST'97, Bydgoszcz, 1997, t. D, s. 113–122

[2] Dixon B.: *Element-base costing for interconnection*. W: Materiały z konferencji *The Third Conference on International and Polish Experiences on Interconnection Issues*, Warszawa, 1999

[3] Fisher R., Ury W., Patton B.: *Dochodząc do TAK – ngocjowanie bez poddawania się*. Warszawa, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, 2000

[4] Granat J.: *Metody interakcji z użytkownikiem w wielokryterialnych systemach wspomagania decyzji*. Rozprawa doktorska. Warszawa, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Warszawa, 1997

[5] Kamiński F.: *Prawo telekomunikacyjne a prawo o konkurencji*. W: Materiały z Krajowego Sympozjum Telekomunikacyjnego KST'98, Bydgoszcz, 1998, t. D, s. 55–64

[6] Karasek J., Szymański T.: *Wpływ alokacji kosztów na rozliczenia międzyoperatorskie*. W: Materiały z Krajowego Sympozjum Telekomunikacyjnego KST'99, Bydgoszcz, 1999, t. A, s. 234–243

[7] Kręglewski T., Granat J., Wierzbicki A.P.: *IAC-DIDAS-N, A Dynamic Interactive Decision Analysis and Support System for Multicriteria Analysis of Nonlinear Models*, vol. 4.0. Laxenburg (Austria), International Institute for Applied Systems Analysis, 1991

[8] Laskowski S.: *Koncepcja operatora najbardziej obiecującego*. Raport nr 02-13. Warszawa, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, 2002

[9] Laskowski S.: *Modelowanie gry rynkowej na konkurencyjnym rynku telekomunikacyjnym*. Telekomunikacja i Techniki Informacyjne, 2004, nr 3-4, s. 47–60

[10] Laskowski S.: *Modelowanie popytu na usługi telekomunikacyjne*. Telekomunikacja i Techniki Informacyjne, 2003, nr 1-2, s. 38–48

[11] Laskowski S.: *Niewystarczalność podejścia kosztowego w procesie ustalania cen za usługi telekomunikacyjne*. W: Materiały z konferencji *The Eighth Conference on International and Polish Experiences on Interconnection Issues*, Warszawa, 2004

[12] Laskowski S.: *O roli informacji na temat macierzy wypłat w konkurencyjnej grze na rynku telekomunikacyjnym*. Telekomunikacja i Techniki Informacyjne, 2004, nr 3-4, s. 61–72

[13] Laskowski S.: *Wspomaganie procesu ustalania cen detalicznych i negocjacji stawek rozliczeniowych na konkurencyjnym rynku usług telekomunikacyjnych*. Rozprawa doktorska. Warszawa, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, 2006

[14] Michalak N., Kantowicz G.: *Operatorzy telekomunikacyjni na polskim rynku – więcej konkurencji czy współpracy*. INFOTEL, 2000, nr 7-8, s. 13–14

[15] Ogryczak W.: *Wspomaganie decyzji w warunkach ryzyka*. Skrypt wykładu. Warszawa, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, 2002

[16] Ouradou F.: *French case: cost based approach for setting interconnection charges*. W: Materiały z konferencji *The Third Conference on International and Polish Experiences on Interconnection Issues*, Warszawa, 1999

[17] Piątek S.: *Prawo telekomunikacyjne Wspólnoty Europejskiej*. Warszawa, Wydawnictwo C.H. Beck, 2003

[18] Piotrowski A.J.: *Telekomunikacja – koszty i opłaty*. Telecom Forum, 1996, nr 3

[19] Piwowarska R.: *Prawna ochrona konkurencji i przeciwdziałanie praktykom monopolistycznym na rynku telekomunikacyjnym w Polsce*. Praca magisterska. Warszawa, Uniwersytet Warszawski, Wydział Zarządzania, 1999

[20] Schmidt F., González López F.: *An analytical cost model for the national core network*. Consultative document prepared by WIK for the Regulatory Authority for Telecommunications and Posts, Wissenschaftliches Institut für Kommunikationsdienste GmbH, 1999

[21] Straffin P.D.: *Teoria gier*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe Scholar, 2001

[22] Swisscom, *Long-run incremental cost (LRIC). Interconnection Price Calculation for 2001*, www.swisscom.com/gd/services/wholesale/news/pdf/Lric-en.pdf

[23] Tyson E.: *Cost allocation for the determination of interconnection charges*. W: Materiały z konferencji *The Fourth Conference on International and Polish Experiences on Interconnection Issues*, Warszawa, 2000

[24] Ury W.: *Odchodząc od NIE – negocjowanie od konfrontacji do kooperacji*. Warszawa, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, 2000

[25] Wierzbicki A.P.: *Optymalizacja i wspomaganie decycji*. Skrypt wykładu. Warszawa, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, 2000

[26] Wierzbicki A.P.: *Reference point methods in vector optimization and decision support*. Interim Report IR-98-017. Laxenburg (Austria), International Institute for Applied Systems Analysis, 1998

[27] Wierzbicki A.P., Makowski M.: *Multi-objective optimization in negotiation support*. Technical Report. Laxenburg (Austria), International Institute for Applied Systems Analysis, 1992

[28] Wissenschaftliches Institut für Kommunikationsdienste GmbH: „An analytical cost model for the local network”. Consultative document prepared by WIK for the Regulatory Authority for Telecommunications and Posts, 1998

[29] Worobiew N.N., Kofler E., Greniewski H.: *Strategia gier*. Książka i Wiedza, Warszawa, 1969

[30] Zbiorczyk J.: *Kalkulacja kosztów usługi powszechnej i interconectu w TP SA*. W: Materiały z konferencji *The Fourth Conference on International and Polish Experiences on Interconnection Issues*, Warszawa, 2000

Sylwester Laskowski

Mgr inż. Sylwester Laskowski (1973) – absolwent Wydziału Elektroniki i Technik Informacyjnych Politechniki Warszawskiej (1999); absolwent Wydziału Instrumentalnego Warszawskiej Akademii Muzycznej (2003); doktorant w Instytucie Automatyki i Informatyki Stosowanej PW; pracownik Instytutu Łączności w Warszawie (od 2004); zainteresowania naukowe: techniki informacyjne, wspomaganie decyzji, analiza wielokryterialna, sztuka i technika negocjacji, teoria gier, rynek telekomunikacyjny i współpraca międzyoperatorska.
e-mail: S.Laskowski@itl.waw.pl