Wymagania na rozdzielczość i nieliniowość przetwornika C/A dla sygnału OFDM

Adam Rudziński

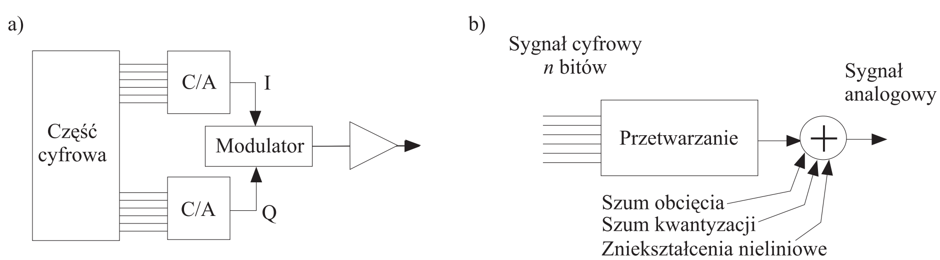
Sebastian Kozłowski

Przedstawiono model analityczny, umożliwiający wyznaczenie błędów wnoszonych do sygnału OFDM w procesie przetwarzania cyfrowo-analogowego. Zaproponowano wyrażenia do oszacowania wymaganej rozdzielczości i dopuszczalnych nieliniowości przetwornika C/A, gwarantujących utrzymanie zniekształceń sygnału poniżej założonego poziomu.

przetwornik cyfrowo-analogowy, modulacja OFDM, szum kwantyzacji, nieliniowość całkowa, nieliniowość różniczkowa

Wprowadzenie

Przetworniki cyfrowo-analogowe (C/A) są obecnie jednymi z niezbędnych elementów każdego radiowego urządzenia nadawczego [1]. Przykładem ich zastosowania jest typowa konstrukcja nadajnika radiowego z modulacją kwadraturową, której uproszczony schemat jest przedstawiony na rys. 1. Układy przetworników C/A stanowią interfejs między częścią cyfrową, w której generowane są dane do transmisji, a częścią analogową, w której następuje przemiana częstotliwości i wzmocnienie sygnału. Dlatego bardzo istotny jest wybór przetwornika o odpowiednio dobrych parametrach, zapewniającego poprawne przetwarzanie i utrzymującego założoną jakość sygnału. Zagadnienie to jest szczególnie istotne w przypadku stosowania modulacji OFDM – *Orthogonal Frequency Division Multiplexing* (modulacji na wielu ortogonalnych podnośnych), która sprawia, że przebieg czasowy przesyłanego sygnału staje się bardzo skomplikowany.



Rys. 1. *a) Uproszczony schemat blokowy typowego nadajnika radiowego z modulacją kwadraturową. b) Model funkcjonalny przetwornika C/A*

Proces przetwarzania sygnału z postaci cyfrowej do analogowej, podobnie jak każdy inny proces fizyczny, nie jest wolny od zjawisk mających negatywny wpływ na przetwarzany sygnał. Można wyróżnić kilka mechanizmów degradacji sygnału przez przetwornik C/A [1, 2], których nie można pominąć przy projektowaniu urządzeń. Są to m.in. ograniczenie sygnału wyjściowego do skończonego zakresu (obcinanie), kwantyzacja oraz zniekształcenia przez nieliniowości (różniczkową i całkową) – przedstawione w modelu funkcjonalnym przetwornika, przedstawionym schematycznie na rys. 1b. Wyboru przetwornika można dokonać przeprowadzając symulacje i analizując ich wyniki [3, 4], co jest jednak czasochłonne i nie ukazuje jawnie zależności, które wpływają na wynik przetwarzania. O wiele wygodniej jest skorzystać z modelu analitycznego, oczywiście gdy taki model istnieje. Spośród wymienionych mechanizmów degradacji sygnału najdokładniej został przeanalizowany wpływ obcięcia sygnału [5]. Ograniczony model, umożliwiający wyznaczenie wymaganej rozdzielczości (liczbę bitów) przetwornika, można znaleźć w [6], natomiast wydaje się, że model analityczny opisujący wpływ nieliniowości na sygnał z modulacją na wielu podnośnych nie został jeszcze przez nikogo opublikowany.

W niniejszej pracy podjęto próbę stworzenia modelu analitycznego, umożliwiającego wyznaczenie wymaganej rozdzielczości i dopuszczalnej nieliniowości przetwornika C/A, zapewniających przetwarzanie sygnału OFDM z degradacją poniżej założonego poziomu. W dostępnych obecnie przetwornikach następuje bardzo szybkie ustalanie się poziomu sygnału wyjściowego, dlatego skoncentrowano się na parametrach statycznych, zakładając, że przetwarzany sygnał jest wolnozmienny, a więc na wyjściu przetwornika występuje sygnał schodkowy o idealnie stromych zboczach. Otrzymane wyniki pokrywają się z przeprowadzonymi symulacjami numerycznymi i są istotnie różne od przedstawionych w [6], według których wymagana rozdzielczość przetwornika zależy od konstelacji i liczby podnośnych.

Przedstawione dalej zależności są ogólniejsze i umożliwiają powiązanie wymaganej rozdzielczości z poziomem obcięcia sygnału, liczbą podnośnych, liczbą próbek sygnału oraz dopuszczalnym błędem przetwarzania, co pośrednio wprowadza zależność od modulacji zastosowanej dla podnośnych. W szczególności, uzyskane wyniki wskazują na istotny wpływ gęstości dyskretyzacji, tj. stosunku liczby próbek do liczby podnośnych. Według Autorów, przedstawione rozważania, dotyczące wpływu nieliniowości przetwornika, wykraczają poza wszelkie dostępne w literaturze światowej.

Założenia modelu i definicje

Cyfrowy sygnał OFDM (z modulacją na wielu ortogonalnych podnośnych) jest podawany do przetwornika C/A. Przetwarzany sygnał może stanowić całość przesyłanych przez urządzenie danych lub być jedynie ich częścią, np. w przypadku, gdy jest to jeden ze strumieni wejściowych modulatora kwadraturowego, co jednak nie jest istotne w badanym zagadnieniu. Zostaną pominięte efekty dynamiczne, takie jak skończony czas ustalania się poziomu sygnału na wyjściu przetwornika czy jitter (czasu lub fazy), zakładając, że sygnał zmienia się na tyle wolno, że proces przemiany można wystarczająco dobrze opisać za pomocą parametrów statycznych. W wyprowadzeniach ograniczono się do pojedynczego symbolu OFDM, którego ogólną postać cyfrową można zapisać jako:

$$x_i \equiv x(iT) = \frac{1}{\sqrt{N_\mathrm{S}}} \sum_{k \in K} A_k \cos(\omega_k iT + \phi_k)\,, \tag{1}$$

gdzie:

- i – indeksuje kolejne próbki,
- T – jest okresem próbkowania,
- N_S – liczbą próbek „właściwego” symbolu, po usunięciu wszelkiego rodzaju okresów ochronnych, prefiksów cyklicznych itp.

Symbol jest złożony z K podnośnych, indeksowanych przez k, dla których założono jednakowe schematy modulacji. Nie nałożono dodatkowych warunków na wartości N_{S} i K, dopuszczając dowolnie gęstą dyskretyzację, określaną stosunkiem N_{S}/K. Pulsacje podnośnych ω_k są dobrane w taki sposób, aby odpowiadające im przebiegi były ortogonalne w przedziale równym czasowi trwania symbolu $T_{\mathrm{S}} = N_{\mathrm{S}}T$:

$$\frac{1}{N_{\mathrm{S}}}\sum_i \exp(\mathrm{j}\omega_k iT)\exp(-\mathrm{j}\omega_{k'} iT) = \delta_{kk'}, \tag{2}$$

gdzie:
$\delta_{kk'}$ – delta Kroneckera.

Symbole na poszczególnych podnośnych koduje się poprzez ich amplitudy A_k lub fazy ϕ_k, które są stałe w czasie trwania symbolu OFDM. Przyjęto, że symbol ma zerową składową stałą, która jest szczególnie podatna na przesunięcie przez przetwornik i nie nadaje się do przesyłania informacji. Dodatkowo (dla ustalenia uwagi) założono, że wszystkie $\omega_k > 0$. Średnia moc symbolu OFDM wynosi

$$\sigma^2 = K\left\langle C^2\right\rangle, \tag{3}$$

gdzie:
$\left\langle C^2\right\rangle$ – średnia moc konstelacji, wyznaczana ze wzoru:

$$\left\langle C^2\right\rangle = \sum_{k\in C}\frac{A_k^2}{2M}, \tag{4}$$

w którym:
k – przebiega konstelację (zbiór symboli) C,
M – liczba symboli w konstelacji.

Do opisu przetwarzania przez przetwornik C/A o rozdzielczości n bitów jest wygodnie przyjąć jako jednostkę dla sygnału wyjściowego LSB (*Least Significant Bit*), tj. różnicę między idealnie rozłożonymi poziomami wyjściowymi, wynoszącą $1/(2^n-1)$ część pełnego zakresu wyjściowego. Wówczas sygnał na wyjściu przetwornika przyjmuje wartości całkowite ze zbioru $\left\{-2^{n-1},\ldots,2^{n-1}-1\right\}$, zwane dalej poziomami (dla przejrzystości zapisu jednostka LSB nie będzie jawnie wskazywana). Dzięki temu sygnał wyjściowy można wprost (bez dodatkowych przeskalowań i przesunięć) porównywać z sygnałem wejściowym. Amplituda sygnału wyjściowego jest ograniczona do wartości $2^{n-1}-1$, co powoduje obcinanie fragmentów sygnału wejściowego przekraczających tę wartość. Przebieg symbolu wejściowego poddawany jest kwantyzacji, która przekształca go do postaci schodkowej

$$x_i^{\mathrm{q}} = x_i + \Delta_i^{\mathrm{q}}, \tag{5}$$

gdzie:
Δ_i^{q} – błąd (szum) kwantyzacji,
x_i^{q} – przyjmuje wartości z zakresu wyjściowego przetwornika.

Uwzględniono również nieliniowości, czyli zniekształcenia sygnału spowodowane przez przesunięcia poziomów na wyjściu względem wartości idealnych (błędy odwzorowania poziomów). Ponieważ o jakości przetwarzania decyduje możliwość poprawnego odbioru sygnału w odbiorniku, założono, że sygnał przetworzony jest sprowadzany ponownie do postaci cyfrowej przez idealny przetwornik A/C i analizowany bez dalszych zniekształceń. Przy przyjętych założeniach sygnał wyjściowy można opisać wyrażeniem

$$y_i = x_i^{\mathrm{q}} + \Delta\left(x_i^{\mathrm{q}}\right), \tag{6}$$

gdzie:
$\Delta(p)$ – błąd odwzorowania poziomu p przez rozważany przetwornik C/A.

Błędy wnoszone przez system można scharakteryzować za pomocą EVM (*Error Vector Magnitude*), którą to wielkość definiuje się jako pierwiastek ze stosunku średniej mocy wektora błędu do mocy odniesienia. W przypadku modulacji na wielu podnośnych jako moc odniesienia można wybrać średnią moc sygnału [7]. Zgodnie z tą definicją

$$\mathrm{EVM} = \sqrt{\frac{\left\langle \mathrm{ev}^2 \right\rangle}{\sigma^2}}, \tag{7}$$

gdzie:
ev – wektor błędu.

Wartość EVM wyraża się zazwyczaj w procentach. Przyjęta definicja pozwala łatwo obliczyć stosunek mocy sygnału do mocy szumu $\mathrm{SNR} = \mathrm{EVM}^{-2}$.

Traktując wszystkie trzy uwzględniane źródła szumu i zniekształceń sygnału jako niezależne można napisać:

$$\left\langle \mathrm{ev}^2 \right\rangle = \left\langle \mathrm{ev}_{\mathrm{c}}^2 \right\rangle + \left\langle \mathrm{ev}_{\mathrm{q}}^2 \right\rangle + \left\langle \mathrm{ev}_{\mathrm{nl}}^2 \right\rangle, \tag{8}$$

gdzie:
$\left\langle \mathrm{ev}_{\mathrm{c}}^2 \right\rangle$ – średnia moc wektora błędu obcięcia,
$\left\langle \mathrm{ev}_{\mathrm{q}}^2 \right\rangle$ – średnia moc wektora błędu kwantyzacji,
$\left\langle \mathrm{ev}_{\mathrm{nl}}^2 \right\rangle$ – średnia moc wektora błędu zniekształceń nieliniowych.

Na wartość EVM wpływają wówczas trzy wielkości: $\mathrm{EVM_c} = \sqrt{\left\langle \mathrm{ev}_{\mathrm{c}}^2 \right\rangle / \sigma^2}$ pochodzący od szumu obcięcia, $\mathrm{EVM_q} = \sqrt{\left\langle \mathrm{ev}_{\mathrm{q}}^2 \right\rangle / \sigma^2}$ pochodzący od szumu kwantyzacji oraz $\mathrm{EVM_{nl}} = \sqrt{\left\langle \mathrm{ev}_{\mathrm{nl}}^2 \right\rangle / \sigma^2}$ pochodzący od zniekształceń nieliniowych. Są to funkcje parametrów przetwornika i sygnału, zatem, jeżeli interpretować EVM jako dopuszczalną wartość całkowitego błędu, można napisać warunek:

$$\mathrm{EVM_c^2} + \mathrm{EVM_q^2} + \mathrm{EVM_{nl}^2} < \mathrm{EVM}^2, \tag{9}$$

który umożliwia oszacowanie wymagań na parametry przetwornika. Dalej są przedstawione wyprowadzenia wyrażeń opisujących poszczególne składniki.

Weryfikacja numeryczna

W celu weryfikacji modelu porównano jego przewidywania z wynikami obliczeń numerycznych. Przyjęte założenia i ograniczenie się do efektów statycznych umożliwiły wykorzystanie w tym celu prostego algorytmu, złożonego z następujących kroków:

1. Losowanie K punktów z założonej konstelacji C definiujących pojedynczy symbol OFDM.
2. Generacja N_{S} próbek przebiegu sygnału wejściowego (za pomocą IFFT).

3. Wprowadzenie odpowiednich zniekształceń, tj. obcięcia sygnału, kwantyzacji lub błędów odwzorowania poziomów.
4. Obliczenie punktów w założonej konstelacji w sygnale wyjściowym (za pomocą FFT).
5. Obliczenie mocy wektorów błędu i obliczenie EVM dla wylosowanego symbolu OFDM.
6. Wielokrotne powtórzenie poprzednich kroków, co odpowiada przetworzeniu założonej liczby symboli OFDM.
7. Uśrednienie EVM dla wszystkich wylosowanych symboli OFDM, dające ostateczny wynik obliczeń.

Przedstawiane w niniejszej pracy wyniki numeryczne pochodzą z obliczeń wykonywanych dla 1000 symboli OFDM z modulacją 64-QAM na każdej podnośnej.

Szum obcięcia

Do oceny wpływu obcięcia sygnału zastosowano metodę opisaną w [5], uproszczoną przez pominięcie korelacji między kolejnymi próbkami wynikającego z tego szumu. Sygnał x_i można z dobrym przybliżeniem traktować jako proces stochastyczny, którego próbki są niezależnymi zmiennymi losowymi. Z centralnego twierdzenia granicznego wynika, że gęstość prawdopodobieństwa przyjęcia przez próbkę wartości x dana jest rozkładem Gaussa z wariancją σ^2, określoną przez średnią moc sygnału (3):

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \tag{10}$$

Poziom progu obcięcia można określić za pomocą parametru

$$\alpha = \frac{2^{n-1}-1}{\sigma}, \tag{11}$$

wówczas obcięcie polega na ograniczeniu wartości sygnału do zakresu $[-\alpha\sigma, \alpha\sigma]$, próbki szumu obcięcia zaś są zmiennymi losowymi o gęstości prawdopodobieństwa

$$f_c(x) = \begin{cases} f_x(|x|+\alpha\sigma), & \text{gdy } x \neq 0, \\ \int_{-\alpha\sigma}^{\alpha\sigma} \mathrm{d}x\, f_x(x), & \text{gdy } x = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Stosunek wariancji tego rozkładu σ_c^2 do wariancji σ^2 (czyli moc szumu do mocy sygnału wejściowego przetwornika) wynosi

$$\frac{\sigma_c^2}{\sigma^2} = \left(1+\alpha^2\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) - \alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right), \tag{13}$$

gdzie komplementarna funkcja błędu

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \mathrm{d}t\, e^{-t^2}. \tag{14}$$

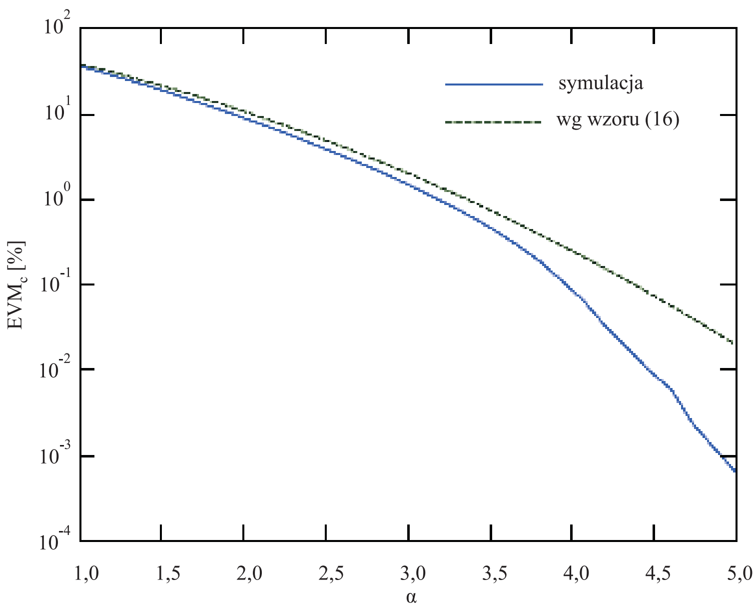
Moc wektora błędu wynosi

$$\left\langle \mathrm{ev}_c^2 \right\rangle = \sigma_c^2, \tag{15}$$

a zatem:

$$\mathrm{EVM}_c = \frac{\sigma_c}{\sigma}. \tag{16}$$

Wykresy stanowiące porównanie wyniku teoretycznego (16) i symulacji przedstawiono na rys. 2. Wyprowadzone wyrażenie stanowi górne ograniczenie wartości EVM_c, które wraz ze wzrostem α staje się coraz mniej dokładne. Pozwala jednak poprawnie przewidzieć czy obcięcie sygnału będzie istotne,



Rys. 2. EVM_c *w funkcji* α

w szczególności zauważyć, że wybór $\alpha = 4$ ogranicza w zadowalającym stopniu jego wpływ [5, 6]. W związku z tym wartość ta jest przyjęta w dalszych obliczeniach. Przedstawione oszacowanie jest wystarczająco dobre do zastosowania w niniejszej pracy, w której skoncentrowano się na wpływie kwantyzacji i nieliniowości.

Szum kwantyzacji

Jeżeli wartość skuteczna sygnału OFDM jest znacznie większa niż 1 LSB, szum kwantyzacji jest z dobrym przybliżeniem szumem białym o jednorodnym rozkładzie wartości próbek [8]. W wyprowadzeniu zatem próbki szumu kwantyzacji Δ_i^{q} będą traktowane jako niezależne zmienne losowe o rozkładzie jednorodnym w przedziale $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, z wariancją równą $\frac{1}{12}$. W takim przypadku, moc szumu rozkłada się jednakowo na wszystkie N_{S} próbek widma, z których jedynie $2K$ odpowiada zaszumianemu sygnałowi OFDM. Dlatego, średnia moc wektora błędu w paśmie sygnału wynosi

$$\left\langle \mathrm{ev}_{\mathrm{q}}^2 \right\rangle = \frac{2K}{N_{\mathrm{S}}} \left\langle \left(\Delta_i^{\mathrm{q}}\right)^2 \right\rangle = \frac{K}{6N_{\mathrm{S}}}, \tag{17}$$

skąd wynika, że

$$\mathrm{EVM}_{\mathrm{q}} = \sqrt{\frac{2K}{3N_{\mathrm{S}}}} \frac{\alpha}{2^n - 2}. \tag{18}$$

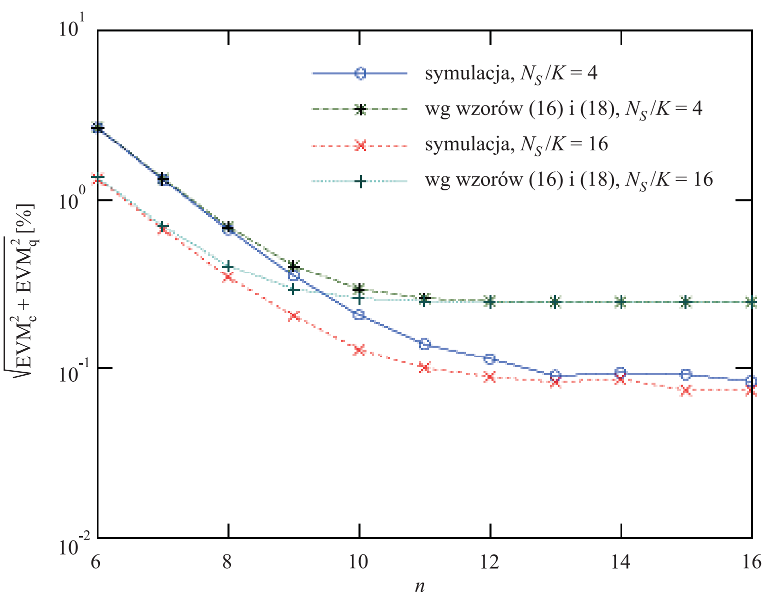
Uwzględniając szumy obcięcia oraz kwantyzacji, warunek (9) przyjmuje postać:

$$\mathrm{EVM} > \sqrt{\frac{\sigma_c^2}{\sigma^2} + \frac{2K}{3N_S}\frac{\alpha^2}{(2^n-2)^2}}. \tag{19}$$

Wynika stąd wymagana rozdzielczość przetwornika

$$n > \log_2\left(2 + \sqrt{\frac{2K}{3N_S}}\frac{\alpha}{\sqrt{\mathrm{EVM}^2 - \sigma_c^2/\sigma^2}}\right). \tag{20}$$

Prawa strona (19) wyznacza teoretyczną wartość EVM, porównaną z wynikami symulacji na rys. 3. Widać, że obie wartości są zgodne przy małej rozdzielczości n. Przy większych rozdzielczościach dominuje błąd obcięcia sygnału, dany przeszacowanym wyrażeniem (16), stąd wyniki symulacji



Rys. 3. EVM *wynikający z obcięcia sygnału i kwantyzacji w funkcji n dla różnych stosunków* N_S/K

są korzystniejsze niż wartości teoretyczne, jednak zgodność przebiegów krzywych jest wyraźna i wskazuje na poprawność wyrażenia (18). Wynika z niego (co znajduje pokrycie w wynikach symulacji), że szum kwantyzacji zależy wprost jedynie od: gęstości dyskretyzacji N_S/K, poziomu obcięcia α oraz rozdzielczości przetwornika. W szczególności, otrzymana zależność od gęstości dyskretyzacji wskazuje, że poprawę jakości przetwarzania C/A można otrzymać zwiększając gęstość dyskretyzacji N_S/K, co nie wynika np. ze wzorów przedstawionych w pracy [6].

Zniekształcenia nieliniowe

Analiza wpływu zniekształceń nieliniowych jest bardziej złożona. Zniekształcenia te mają swoje źródło w błędzie odwzorowania poziomów $\Delta(p)$, będącego różnicą między rzeczywistą a nominalną wartością sygnału na poziomie p na wyjściu przetwornika. Przebieg błędu $\Delta\left(x_i^{\mathrm{q}}\right)$ odpowiadający sygnałowi x_i^{q} można rozdzielić na cztery składniki

$$\Delta\left(x_i^{\mathrm{q}}\right) = \Delta_0 + (G-1)\,x_i^{\mathrm{q}} + \Delta_{\mathrm{d}}\left(x_i^{\mathrm{q}}\right) + \Delta_{\mathrm{s}}\left(x_i^{\mathrm{q}}\right). \tag{21}$$

Pierwsze dwa składniki definiują przesunięcie charakterystyki przetwornika i jej nachylenie (wzmocnienie). Nie mają one znaczenia dla dalszych rozważań. Pozostałe składniki opisują zniekształcenia nieliniowe: $\Delta_{\mathrm{d}}\left(x_i^{\mathrm{q}}\right)$ jest ich częścią wolnozmienną, potraktowaną jako deterministyczna, natomiast $\Delta_{\mathrm{s}}\left(x_i^{\mathrm{q}}\right)$ jest częścią szybkozmienną (pseudolosową), traktowaną jako ergodyczny, stacjonarny proces stochastyczny o zerowej wartości średniej i właściwościach szumu białego:

$$\overline{\Delta_{\mathrm{s}}\left(x_i^{\mathrm{q}}\right)} = \langle \Delta_{\mathrm{s}} \rangle = 0 \tag{22}$$

oraz

$$\overline{\Delta_{\mathrm{s}}\left(x_i^{\mathrm{q}}\right) \Delta_{\mathrm{s}}\left(x_{i+l}^{\mathrm{q}}\right)} = \left\langle \Delta_{\mathrm{s}}^2 \right\rangle \delta_{l0} = \sigma_{\mathrm{s}}^2 \delta_{l0}, \tag{23}$$

gdzie:

$\overline{f_i}$ – wartość średnia przebiegu f_i,

δ_{l0} – delta Kroneckera przyjmująca wartość 1 dla $l = 0$.

Przy założeniu, że obydwie składowe są wzajemnie ortogonalne i nieskorelowane:

$$\overline{\Delta_{\mathrm{d}}\left(x_i^{\mathrm{q}}\right) \Delta_{\mathrm{s}}\left(x_{i+l}^{\mathrm{q}}\right)} = 0, \tag{24}$$

średnia moc wektora błędu staje się sumą średnich mocy pochodzących od obydwu składowych oddzielnie

$$\left\langle \mathrm{ev}_{\mathrm{nl}}^2 \right\rangle = \left\langle \mathrm{ev}_{\mathrm{nld}}^2 \right\rangle + \left\langle \mathrm{ev}_{\mathrm{nls}}^2 \right\rangle. \tag{25}$$

Składowe pseudolosową i deterministyczną można powiązać z parametrami katalogowymi, którymi są nieliniowości różniczkowa DNL (*Differential Nonlinearity*) i całkowa INL (*Integral Nonlinearity*) [9].

Wektor błędu składowej pseudolosowej

Składowa pseudolosowa (tj. szybkozmienna) błędu odwzorowania poziomów przypomina pod pewnymi względami szum kwantyzacji. Do sygnału dodawane jest nieregularne zniekształcenie, zależne od chwilowej wartości sygnału. Zatem, podobnie jak przy kwantyzacji, moc tego błędu rozkłada się równomiernie w pewnym pasmie częstotliwości, do pasma sygnału zaś trafia tylko jej część. W przypadku kwantyzacji stanowi ona $2K/N_{\mathrm{S}}$ całej mocy szumu. Jednakże błąd kwantyzacji przyjmuje wartości ze zbioru ciągłego, dlatego prawdopodobieństwo tego, że kolejne próbki tego błędu przyjmują jednakową wartość, jest równe zeru. Natomiast błąd odwzorowania poziomu jest określony na zbiorze dyskretnym, wobec tego dla niego takie zdarzenie ma niezerowe prawdopodobieństwo. Pojawianie się w realizacji szumu ciągów próbek o tej samej wartości prowadzi do zawężenia jego pasma. W efekcie, ułamek mocy szumu przypadający na pasmo sygnału można zapisać jako $2K/N_{\mathrm{eff}}$, w którym definiuje się efektywną liczbę próbek

$$N_{\mathrm{eff}} = \frac{N_{\mathrm{S}}}{\langle L \rangle}, \tag{26}$$

gdzie:

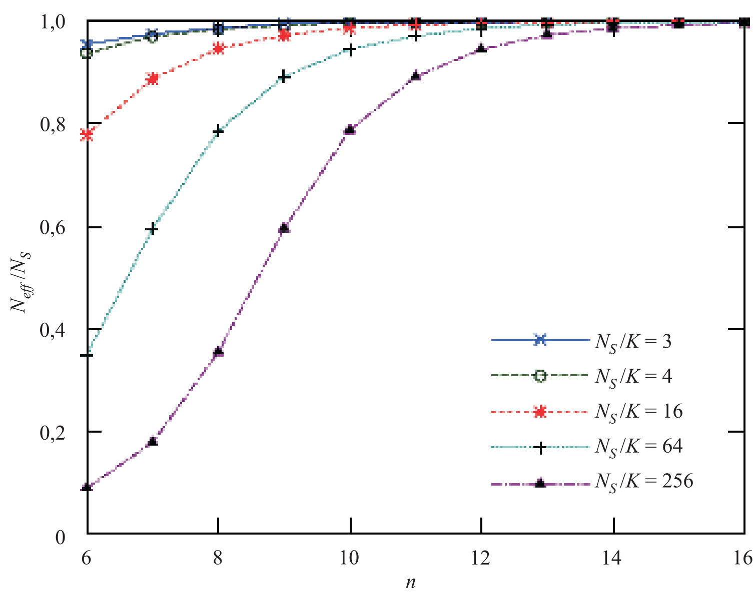
$\langle L \rangle$ – średnia długość ciągu kolejnych próbek o jednakowej wartości w skwantowanym sygnale x_i^{q}.

W niniejszej pracy $\langle L \rangle$ jest wyznaczane za pomocą symulacji numerycznej. Można jednak wskazać dwa mechanizmy wpływające na wartość $\langle L \rangle$:

1. „Przypadkowa" redukcja efektywnej liczby próbek, mająca miejsce, gdy kilka kolejnych próbek skwantowanego sygnału x_i^{q} przyjmuje taką samą wartość, mimo że w ogólności kolejne próbki przebiegu x_i mogą znacznie się różnić. Wyprowadzenie wyrażenia na $\langle L \rangle$ należy w tym przypadku oprzeć na rozkładzie prawdopodobieństwa wartości próbek sygnału skwantowanego. Z pobieżnej analizy wynika, że dla tego mechanizmu $\langle L \rangle$ jest malejącą funkcją n i rosnącą funkcją N_{S}.
2. „Bezwładnościowa" redukcja efektywnej liczby próbek, która zachodzi, gdy zmiany wartości kolejnych próbek w całym przebiegu x_i są nieznaczne (o mniej niż jeden poziom). Mechanizm ten dominuje, gdy dyskretyzacja przebiegu jest bardzo gęsta, czyli stosunek N_{S}/K jest odpowiednio duży. W tym przypadku $\langle L \rangle = \tau/T$, gdzie τ oznacza średni czas przejścia x_i^{q} między poziomami. Wydaje się, że czas ten można wyznaczyć szacując odwrotność charakterystycznego nachylenia sygnału, na które naturalnym kandydatem wydaje się być pierwiastek ze średniego kwadratu pochodnej. Wówczas, $\langle L \rangle \sim 2^{-n}\alpha N_{\mathrm{S}}/K$.

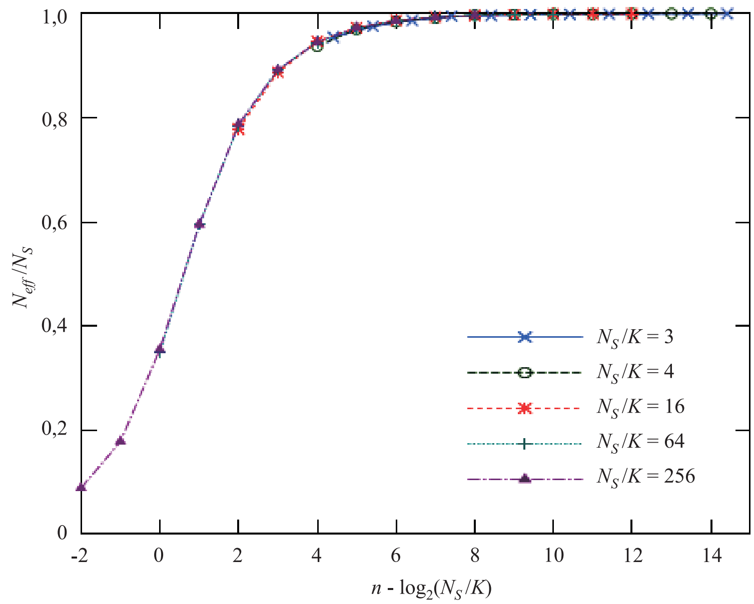
Dominujący jest ten mechanizm, który prowadzi do większej wartości $\langle L \rangle$.

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że stosunek $N_{\mathrm{eff}}/N_{\mathrm{S}}$ nie zależy od liczby podnośnych, zależy natomiast od gęstości dyskretyzacji N_{S}/K. Wyniki obliczeń numerycznych tak znormalizowanej liczby próbek znajdują się na rys. 4. Daje się zauważyć, że przy dużym nadpróbkowaniu i małej



Rys. 4. *Znormalizowana efektywna liczba próbek błędu odwzorowania poziomu $N_{\mathrm{eff}}/N_{\mathrm{S}}$ w funkcji rozdzielczości przetwornika n*

rozdzielczości n punkty określające efektywną liczbę próbek układają się wzdłuż krzywej o innym charakterze niż pozostałe – jest to obszar, w którym dominuje drugi, czyli „bezwładnościowy", mechanizm redukcji N_{eff}. Można także zauważyć, co obrazuje rys. 5, że wszystkie krzywe można



Rys. 5. *Znormalizowana efektywna liczba próbek błędu odwzorowania poziomu $N_{\mathrm{eff}}/N_{\mathrm{S}}$ w funkcji różnicy rozdzielczości przetwornika n i logarytmu z nadpróbkowania N_{S}/K*

„dopasować”, przesuwając je o $\log_2(N_{\mathrm{S}}/K)$ wzdłuż osi odciętych, a na dominujący mechanizm redukcji N_{eff} wskazuje znak różnicy $n-\log_2(N_{\mathrm{S}}/K)$.

W rezultacie przedstawionych rozważań wynika, że dla składowej pseudolosowej

$$\left\langle \mathrm{ev}_{\mathrm{nls}}^2 \right\rangle = \frac{2K}{N_{\mathrm{eff}}} \overline{\left(\Delta_{\mathrm{s}}\left(x_i^{\mathrm{q}}\right)\right)^2} = \frac{2K}{N_{\mathrm{eff}}} \sigma_{\mathrm{s}}^2. \tag{27}$$

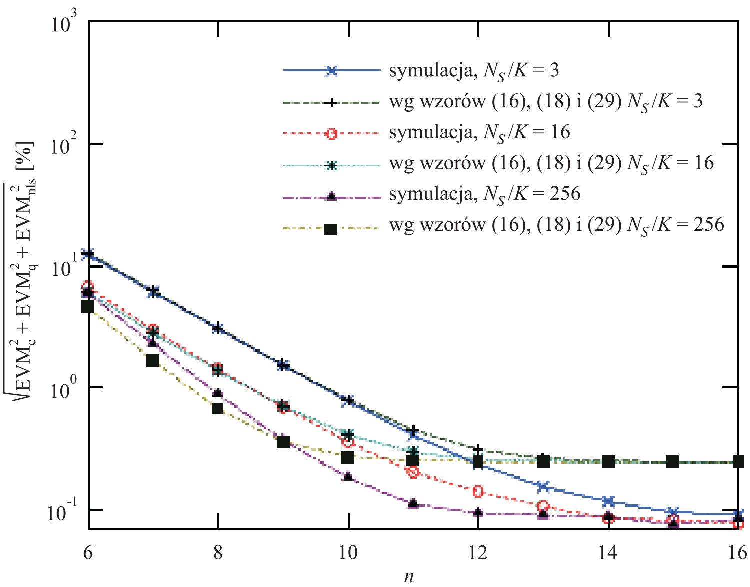
Producenci przetworników zazwyczaj podają nieliniowość różniczkową w najgorszym przypadku, czyli jej wartość maksymalną, co odpowiada $\mathrm{DNL} = 2\max_p |\Delta_{\mathrm{s}}(p)|$. Przy założeniu, że składowa pseudolosowa błędu ma rozkład jednostajny, $\sigma_{\mathrm{s}}^2 = \mathrm{DNL}^2/12$, to

$$\left\langle \mathrm{ev}_{\mathrm{nls}}^2 \right\rangle = \frac{K}{6N_{\mathrm{eff}}} \mathrm{DNL}^2, \tag{28}$$

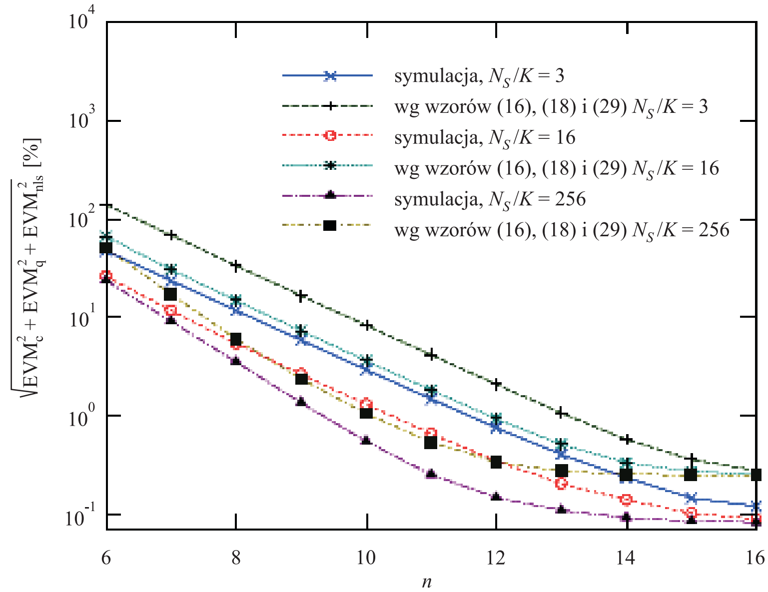
stąd:

$$\mathrm{EVM}_{\mathrm{nls}} = \sqrt{\frac{\left\langle \mathrm{ev}_{\mathrm{nls}}^2 \right\rangle}{\sigma^2}} = \sqrt{\frac{2K}{3N_{\mathrm{eff}}}} \frac{\alpha \mathrm{DNL}}{2^n - 2}. \tag{29}$$

Wprawdzie tak prosty model teoretyczny nie daje wyników pokrywających się z wynikami symulacji aż tak dokładnie, jak w przypadku błędu kwantyzacji, ale zapewnia zadowalającą zgodność oraz dobrze oddaje wpływ parametrów przetwornika i sygnału na jakość przetwarzania. Przykładowe wykresy, stanowiące porównanie wyników teoretycznych i numerycznych, znajdują się na rys. 6, rys. 7 i rys. 8. Widać z nich, że utworzony model daje wartości bardzo dobrze pokrywające się z wynikami symulacji przy mniejszych wartościach DNL, jednakże wciąż na tyle dużych, aby można było go

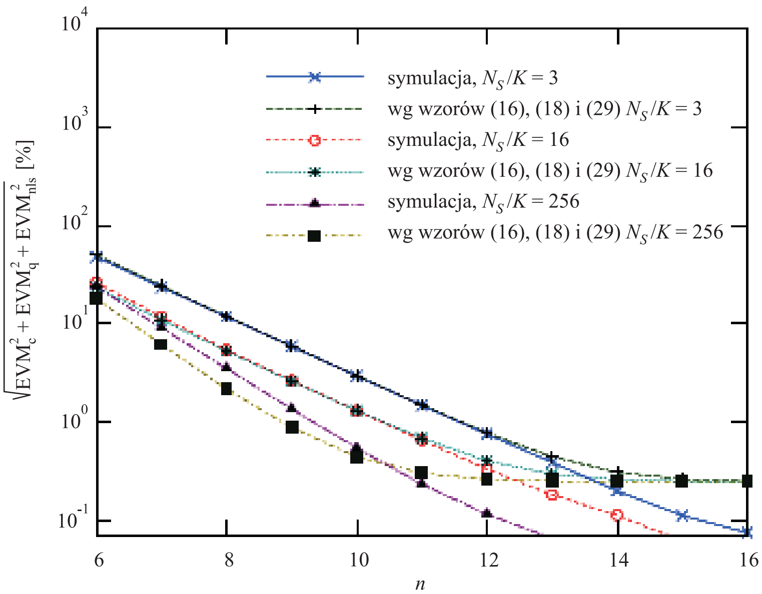


Rys. 6. EVM *wynikający z obcięcia sygnału, kwantyzacji i nieliniowości różniczkowej* DNL $= 4$ *w funkcji n dla różnych stosunków* N_S/K*, przy* $K = 2048$



Rys. 7. EVM *wynikający z obcięcia sygnału, kwantyzacji i nieliniowości różniczkowej* DNL $= 16$ *w funkcji n dla różnych stosunków* N_S/K*, przy* $K = 2048$

wykorzystać w praktyce. Daje się zauważyć, że przy większej liczbie podnośnych błędy szacowane wyrażeniem (29) zależą od K, co jest sprzeczne z wynikami symulacji. Natomiast w każdym przypadku krzywe teoretyczne i symulacyjne charakteryzują się takimi samymi nachyleniami. Oznacza to,



Rys. 8. EVM *wynikający z obcięcia sygnału, kwantyzacji i nieliniowości różniczkowej* $\mathrm{DNL} = 16$ *w funkcji n dla różnych stosunków* N_S/K*, przy* $K = 256$

że wyrażenie (29) jest oparte na poprawnych założeniach i uwzględnia w odpowiedni sposób efekty składające się na błędy przetwarzania, dzięki czemu pozwala precyzyjnie określać, do jakich zmian prowadzą modyfikacje parametrów przetwornika lub sygnału (o zadanej liczbie podnośnych).

Wektor błędu składowej wolnozmiennej

Zniekształcenia sygnału (z pominięciem przesunięcia składowej stałej) pochodzące od składowej wolnozmiennej wynikają z różnic między błędami poziomów odpowiadających kolejnym próbkom sygnału skwantowanego. Dlatego, średnią moc wektora błędu tych zniekształceń można zapisać jako:

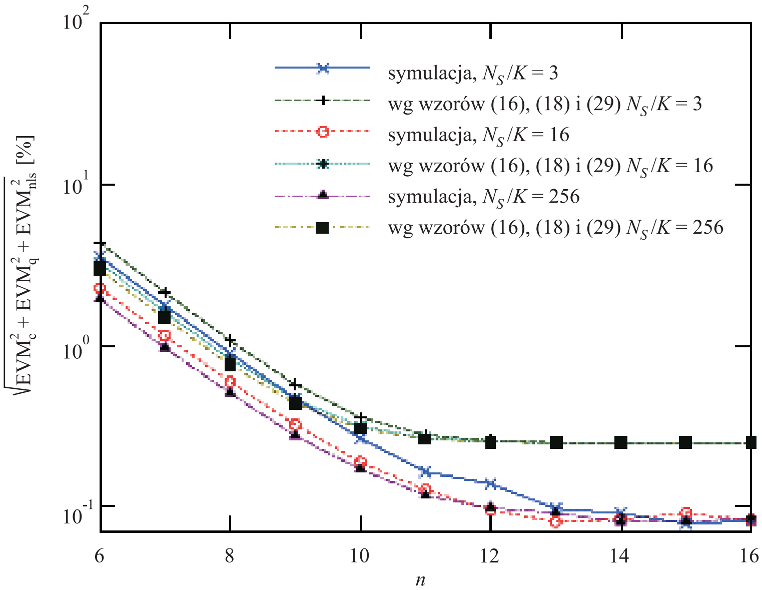
$$\left\langle \mathrm{ev}_\mathrm{nld}^2 \right\rangle = \overline{\left(\Delta_\mathrm{d}\left(x_{i+1}^\mathrm{q}\right) - \Delta_\mathrm{d}\left(x_i^\mathrm{q}\right)\right)^2}. \tag{30}$$

Błąd ten można powiązać z obydwiema nieliniowościami. Traktując wartość nieliniowości całkowej jako najgorszy przypadek, czyli maksymalne odchylenie od idealnej charakterystyki liniowej, $\mathrm{INL} = \max_p |\Delta(p)| = \max_p |\Delta_\mathrm{d}(p)| + \mathrm{DNL}/2$. Rozkład widmowy mocy błędu pochodzącego od składowej wolnozmiennej zależy od jej charakterystyki, dlatego w ogólnym oszacowaniu należy przyjąć, że cała moc błędu przypada na pasmo sygnału. Otrzymuje się wtedy wyrażenie:

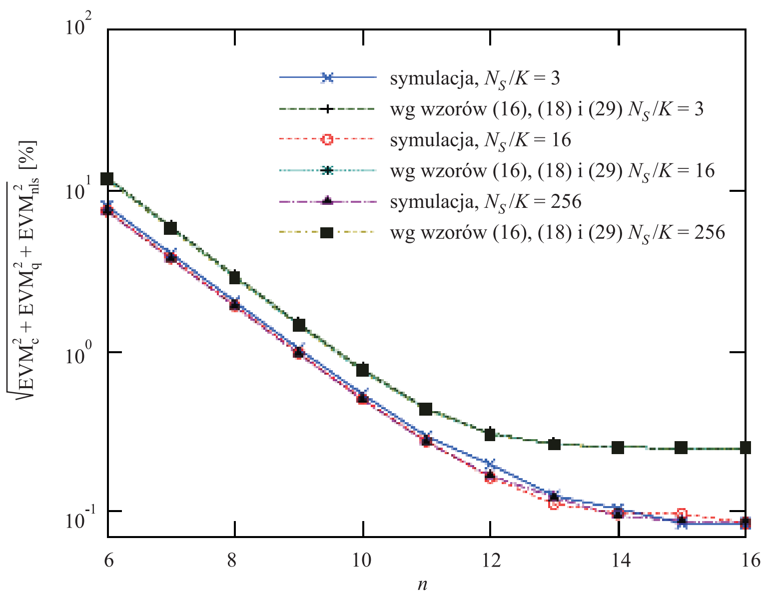
$$\mathrm{EVM}_\mathrm{nld} = \sqrt{\frac{\left\langle \mathrm{ev}_\mathrm{nld}^2 \right\rangle}{\sigma^2}} = S\left[x_i^\mathrm{q}\right] \frac{\alpha\,(2\,\mathrm{INL} - \mathrm{DNL})}{2^n - 2}, \tag{31}$$

z zależnym od przebiegu $\Delta_\mathrm{d}\left(x_i^\mathrm{q}\right)$ współczynnikiem

$$S\left[x_i^\mathrm{q}\right] = \sqrt{\frac{\overline{\left(\Delta_\mathrm{d}\left(x_{i+1}^\mathrm{q}\right) - \Delta_\mathrm{d}\left(x_i^\mathrm{q}\right)\right)^2}}{\max_p |\Delta_\mathrm{d}(p)|^2}}. \tag{32}$$



Rys. 9. EVM *wynikający z obcięcia sygnału, kwantyzacji i nieliniowości całkowej* $\mathrm{INL} = 2$ *w funkcji* n *dla różnych stosunków* N_S/K



Rys. 10. EVM *wynikający z obcięcia sygnału, kwantyzacji i nieliniowości całkowej* $\mathrm{INL} = 8$ *w funkcji* n *dla różnych stosunków* N_S/K

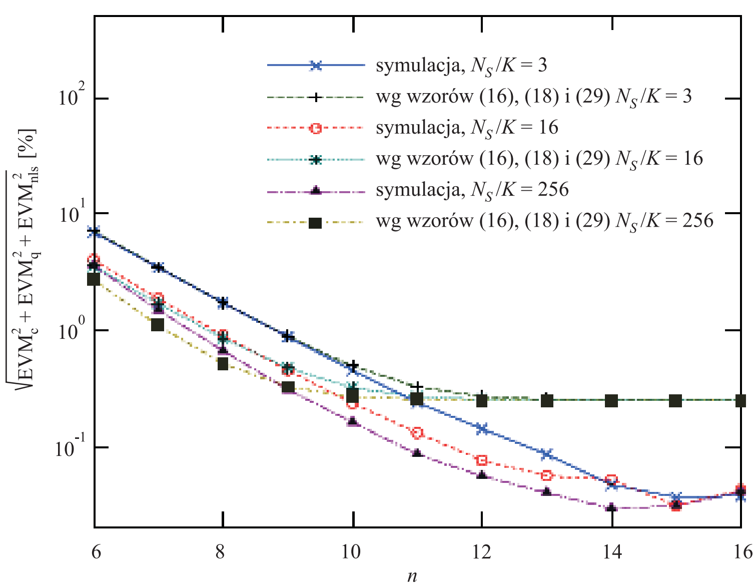
Przykładowe wyniki obliczeń numerycznych i teoretycznych porównane są na rys. 9 i rys. 10. Szacunki za pomocą opisanego modelu prowadzą do wartości przewyższających trochę wyniki symulacji. Aby uzyskać poprawę dokładności należy wyrażenie (31) uzupełnić o czynnik wskazujący jaki ułamek mocy wektora błędu przypada na pasmo sygnału. Widać jednak, że wyrażenie to zależy w poprawny sposób od uwzględnionych w nim parametrów przetwornika i sygnału. W szczególności można zauważyć, że symulacje przeprowadzone dla wartości INL $= 8$ (przy której błąd od składowej wolnozmiennej był dominującym błędem) potwierdzają, że gęstość dyskretyzacji nie ma wpływu na pogorszenie jakości przetwarzania przez deterministyczą część błędu $\Delta_{\mathrm{d}}\left(x_i^{\mathrm{q}}\right)$.

Całkowity błąd przetwarzania

Wyrażenia (16), (19), (29) oraz (31) umożliwiają wyznaczenie całkowitego błędu przetwarzania, co przy dopuszczalnej wartości EVM pozwala zapisać warunek na wymagane parametry przetwornika (9) w jawnej postaci:

$$\left(\frac{\alpha}{2^n-2}\right)^2\left[\frac{2K}{3N_{\mathrm{S}}}\left(1+\frac{N_{\mathrm{S}}}{N_{\mathrm{eff}}}\mathrm{DNL}^2\right)+S^2\left[x_i^{\mathrm{q}}\right]\left(2\,\mathrm{INL}-\mathrm{DNL}\right)^2\right]<\mathrm{EVM}^2-\mathrm{EVM}_{\mathrm{c}}^2. \tag{33}$$

Wynikają z niego dwa ważne wnioski. Pierwszy, że błąd przetwarzania można częściowo zmniejszyć przez zwiększenie liczby próbek sygnału. Wpływ na poprawę jakości przetwarzania jest największy, gdy charakterystyka błędu odwzorowania poziomu $\Delta(p)$ ma charakter przebiegu pseudolosowego (szybkozmiennego) i gdy rozdzielczość jest odpowiednio duża (co wynika z przeprowadzonej analizy zachowania się N_{eff}). Drugi, że zmiany progu obcięcia sygnału α wpływają nie tylko na poziom szumu obcięcia, ale także na pozostałe omawiane błędy. Jeżeli szum obcięcia jest pomijalny, aby utrzymać błąd przetwarzania na stałym poziomie, zmniejszenie rozdzielczości przetwornika wymaga zwiększenia amplitudy sygnału względem zakresu dynamicznego przetwornika, co odpowiada zmniejszeniu α i zwiększeniu błędu obcinania. W przybliżeniu zmiany te powinny być takie, aby stosunek $\alpha/2^n$ miał stałą wartość.



Rys. 11. EVM *przy obcięciu sygnału, kwantyzacji oraz nieliniowościach* DNL $= 2$ *i* INL $= 2$*, w funkcji n dla różnych stosunków* N_{S}/K*, przy* $K = 256$

Przykładowe wyniki otrzymane za pomocą utworzonego modelu oraz symulacji dla INL = 2 i DNL = 2 znajdują się na rys. 11. Widać, że wartości teoretyczne są bliskie wartościom pochodzącym z obliczeń numerycznych, a ponadto zachowanie krzywych jest identyczne, co świadczy o poprawności przewidywań modelu teoretycznego.

Podsumowanie

W niniejszej pracy przedstawiono prosty model analityczny do oszacowania ilościowego błędów wnoszonych do sygnału OFDM w procesie przetwarzania z postaci cyfrowej na analogową, jak też do określenia wymaganych parametrów, które zapewniają utrzymanie błędów przetwarzania poniżej założonego poziomu. Model ten stanowi narzędzie umożliwiające analizę dokładności przetwarzania i wybór optymalnego przetwornika C/A oraz odpowiednie dostosowanie parametrów samego sygnału. W konstrukcji modelu uwzględniono trzy składniki błędów: błąd obcięcia sygnału, błąd kwantyzacji oraz zniekształcenia nieliniowe. Do oszacowania błędu obcięcia sygnału przyjęto uproszczoną metodę opisaną w [5]. Wyprowadzone wyrażenie prowadzi do wartości malejących wolniej, niż pokazuje symulacja, jednakże znaczne rozbieżności występują dopiero, gdy szum obcięcia staje się bardzo mały ($EVM_c \ll 1\%$). Dla poprawy wyników należy zastosować dla tego składnika dokładniejsze wyrażenie lub wartości otrzymane numerycznie, jednakże w pierwszym przybliżeniu nie jest to konieczne.

Wyprowadzenie wyrażenia opisującego szum kwantyzacji oparto na założeniu, że jest to szum biały o próbkach z jednorodnym rozkładem prawdopodobieństwa, które jest bardzo dobrym przybliżeniem w przypadku sygnału OFDM. Dzięki temu, otrzymany wzór (18), pozwala bardzo dokładnie określić wielkość błędu kwantyzacji. Ze wzoru tego wynika, że wpływ kwantyzacji na dokładność przetwarzania zależy od rozdzielczości przetwornika, poziomu obcięcia sygnału, a także od nadpróbkowania sygnału. Jest to wniosek, którego nie można wyciagnąć na podstawie np. wyrażeń zamieszczonych w [6].

W przypadku ostatniego uwzględnionego źródła błędów przedtwarzania, tj. błędów odwzorowania poziomów przetwornika, rozróżniono błędy generowane przez regularną (wolnozmienną) i pseudolosową (szybkozmienną) część charakterystyki całkowitego błędu. Pokazano, że wpływ części wolnozmiennej zależy od jej przebiegu, natomiast część szybkozmienna ma wpływ podobny jak szum kwantyzacji, z tą różnicą, że w obliczeniach należy uwzględnić fakt, że kolejne próbki błędu mogą mieć jednakową wartość. Zdefiniowano w tym celu efektywną liczbę próbek, która pojawia się w ostatecznym wyrażeniu określającym stosowny składnik błędu przetwarzania.

Na podstawie wyprowadzonego wyrażenia (33) pokazano, że błędy przetwarzania można zmniejszać poprzez zwiększenie liczby próbek sygnału (nadpróbkowanie), otrzymując tym silniejszy efekt, im słabszy wpływ ma regularna część charakterystki błędu odwzorowania poziomu. Wyciągnięto także wniosek, że utrzymanie stałego poziomu błędów kwantyzacji i nieliniowych wymaga, z dobrym przybliżeniem, zachowania stałej wartości stosunku $\alpha/2^n$. Zdaniem Autorów, w literaturze światowej nie zostało dotychczas opublikowane podobne wyrażenie, opisujące proces przetwarzania C/A sygnału OFDM na takim poziomie ogólności.

Praca była współfinansowana ze środków Programu Operacyjnego Innowacyjna Gospodarka, projekt nr POIG.01.01.02-00-014/08.

Bibliografia

[1] *Analog-digital conversion*. Red. W. Kester, Analog Devices, 2004

[2] Colotti J.J.: *Dynamic evaluation of high-speed, high resolution D/A converters*. RF Design, November 1990, s. 51

[3] Come B. i in.: *Impact of front-end non-idealities on bit error rate performance of WLAN-OFDM transceivers*. Proc. 2000 IEEE RAWCON, 2000, s. 91–94

[4] Lee C., El-Tanany M.S., Goubran R.A.: *Impacts of non-ideal analog interfacing factors on OFDM baseband signals*. Proc. 2005 IEEE IMTC, 2005, s. 762–767

[5] Gross R., Veeneman D.: *SNR and spectral properties for a clipped DMT ADSL signal*. 1994 IEEE ICC Conf. Rec., 1994, z. 2, s. 843–847

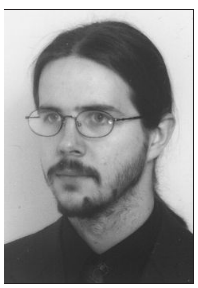
[6] Mehrnia A.: *Optimum DAC resolution for WMAN, WLAN and WPAN OFDM-based standards*. 2005 ICCE Dig. Techn. Papers, 2005, s. 355–356

[7] McKinley M.D. i in.: *EVM calculation for broadband modulated signals*. 64th ARFTG Conf. Dig., Orlando, grudzień 2004, s. 45–52

[8] *Spectrum of quantization noise and conditions of whiteness*. W: Widrow B., Kollár I.: *Quantization noise*. Cambridge, Cambridge University Press, 2008

[9] Maxim Integrated Products: *INL/DNL Measurements for High-Speed Analog-to-Digital Converter (ADCs)*. Nota aplikacyjna nr 283, wrzesień 2000

Adam Rudziński



Dr inż. Adam Rudziński (1980) – absolwent Wydziału Elektroniki i Technik Informacyjnych Politechniki Warszawskiej (2004) oraz Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego (2009); praca zawodowa: projektowanie układów i urządzeń elektronicznych; zainteresowania naukowe: modelowanie układów elektronicznych i zjawisk w nich występujących, konstrukcje urządzeń elektronicznych, oddziaływanie promieniowania elektromagnetycznego z materią.
e-mail: arudzins@poczta.onet.pl
e-mail: adam.rudzinski@ire.pw.edu.pl

Sebastian Kozłowski

Mgr inż. Sebastian Kozłowski (1980) – absolwent Wydziału Elektroniki i Technik Informacyjnych Politechniki Warszawskiej (2004); doktorant w Instytucie Radioelektroniki PW; zainteresowania naukowe: transmisja radiowa – systemy MIMO oraz OFDM.
e-mail: s.kozlowski@ire.pw.edu.pl