MINISTERSTWO ŁĄCZNOŚCI

PRACE INSTYTUTU ŁĄCZNOŚCI

ROK IX ZESZYT 1 (26)

WARSZAWA 1962
WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE

SPIS TREŚCI

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

SOMMAIRE

INHALTSVERZEICHNIS

MINISTERSTWO ŁĄCZNOŚCI

PRACE INSTYTUTU ŁĄCZNOŚCI

ROK IX ZESZYT 1 (26)

WARSZAWA 1962
WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE

Adres Redakcji

Instytut Łączności, Warszawa-Miedzeszyn, ul. Szachowa 1

Rysunki dostarczył Komitet Redakcyjny

WNT Warszawa 1961. Wydanie 1. Nakład 600 egz. Ark. wyd. 4,9. Ark. druk. 5,32/A. Format B5. Papier druk. sat. kl. V, 70 g, 700×1000/16. Rękopis oddano do składania 19. 4. 62. Podpisano do druku 26. 7. 1962. Druk ukończono w lipcu 1962. Symbol 80317/RO

ZAKŁADY GRAFICZNE IM. M. KASPRZAKA W POZNANIU — 919/62 — M-2

PRACE INSTYTUTU ŁĄCZNOŚCI

ROK IX 1962 ZESZYT 1(26)

MARIAN ŁAPIŃSKI 621.015.3:621.317.726

PRZEBIEGI NIEUSTALONE W IMPULSOWYCH WOLTOMIERZACH LAMPOWYCH O PROSTOWANIU SZCZYTOWYM

Rękopis dostarczono do Komitetu Redakcyjnego 23. 9. 1961 r.

Podano analizę nieustalonych przebiegów elektrycznych i mechanicznych w lampowych woltomierzach impulsowych.

Po przeprowadzeniu analizy przebiegów nieustalonych elektrycznych w zakresie przewodzenia diody zostały wyprowadzone ścisłe wzory na prąd nieustalony i ładujący kondensator oraz na napięcie nieustalone u_C występujące na kondensatorze. Po przyjęciu uproszczeń dopuszczalnych w pewnych szczególnych warunkach pracy otrzymuje się znane z literatury wzory R. Rüdenberga i wzory opisujące pracę woltomierza lampowo-elektrostatycznego.

Z funkcji określającej napięcie nieustalone u_C został określony uchyb ładowania zależny od czasu trwania impulsu oraz stałych czasowych ładowania i rozładowania.

Analiza mechanicznych przyczyn nieustalonych wskazań miernika doprowadziła do wyprowadzenia wzoru określającego zależność kąta odchylenia α od czasu dla różnych wartości współczynnika ustalania s.

W końcowej części pracy przeprowadzono analizę uchybów pomiarowych dynamicznych w zależności od okresu wahań mechanicznych ruchomych części miernika.

Wprowadzono pojęcie uchybu pomiarowego dynamicznego dodatniego, wynikłego z odchylenia ponad wartość poprawną i uchybu dynamicznego ujemnego. Podano ponadto uwagi dotyczące właściwego doboru parametrów przyrządu magnetoelektrycznego, pracującego w lampowych woltomierzach impulsowych.

1. UWAGI OGÓLNE

Podawane w literaturze technicznej opisy pracy impulsowych woltomierzy lampowych o prostowaniu szczytowym nie odzwierciedlają w sposób zadowalający przebiegów faktycznie zachodzących w układach oraz nie pozwalają na określanie uchybów pomiarowych powstałych podczas wskazań dynamicznych.

Na przykład metoda R. Rüdenberga badania obwodu prostowania szeregowego ogranicza się do rozważania przypadku prostownika idealnego, którego oporność w kierunku przepustowym jest równa zeru. W związku z tym otrzymane zależności nie odzwierciedlają nieustalonych przebiegów elektrycznych, jakie mają miejsce w przypadku prostowania za pomocą diody lampowej, dla której oporność w kierunku przepustowym jest rzędu 1000 Ω.

Opisy nieustalonych przebiegów mechanicznych w miernikach ograniczają się do przypadku analizy pracy mierników podczas działania prądu w postaci funkcji skokowej, co ma jedynie ograniczone zastosowanie w miernikach lampowych, w których prąd narasta według złożonej zależności. Podany w niniejszej pracy opis przebiegów nieustalonych, zachodzących w impulsowych woltomierzach lampowych o prostowaniu szczytowym, ma elementy nowości ze względu na wyprowadzone zależności opisujące pracę w najbardziej ogólnym przypadku prostowania linearnego.

Niektóre z otrzymanych zależności opisujących przebiegi nieustalone napięć i prądów są na tyle skomplikowane, że nie dają możliwości swobodnego ich stosowania w praktyce, jednakże są to zależności ścisłe. Po przyjęciu założeń upraszczających uzyskuje się odpowiednio prostsze zależności, a w końcowej fazie uproszczeń uzyskuje się wzory podawane w literaturze traktującej o przebiegach nieustalonych, wyprowadzone dla szczególnych przypadków pracy mierników.

2. PRZEBIEGI NIEUSTALONE

Przebiegiem nieustalonym jest przebieg czasowy zjawiska powodowany nagłymi zmianami stanów energetycznych, np. wskutek nagłych zmian prądu w indukcyjnościach lub napięcia na pojemnościach, nagłych zmian prędkości układu ruchomego itp. Jest to przebieg nieokresowy reprezentujący widmo ciągłe.

W przypadku elektrycznych przebiegów nieustalonych w woltomierzu lampowym o prostowaniu szczytowym chodzi o zmiany napięcia na kondensatorze ładowanym przez diodę. Ponadto w impulsowych miernikach lampowych należy brać pod uwagę mechaniczne przebiegi nieustalone powodowane bezwładnością układu ruchomego w mierniku magnetoelektrycznym.

Napięcie powstałe na pojemności, przy nagłych zmianach napięcia zasilającego, nie może się zmieniać w sposób natychmiastowy, gdyż nie jest możliwa nagła zmiana zasobu energii $\frac{1}{2}CU^2$ gromadzonej w kondensatorze. Nagłej zmianie napięcia na kondensatorze odpowiadałoby bowiem wydzielanie nieskończenie wielkiej mocy, której rzeczywiste źródła nie mogą dostarczyć, nawet przy najkrótszym okresie pracy. Dlatego zmiana napięcia na pojemności ma inny przebieg niż zmiana napięcia źródła powodującego proces ładowania.

Elektryczne przebiegi nieustalone trwają nieskończenie długo od chwili dokonania nagłej zmiany napięcia lub prądu. W praktyce jako stan ustalony uważany jest stan obwodu po czasie, gdy już nie trzeba liczyć się z przebiegiem nieustalonym jako względnie małym.

Drugie prawo Kirchhoffa dla dowolnej chwili t w przypadku szeregowego połączenia elementów R, L, C do źródła o napięciu u, zmieniającym się w sposób ciągły według pewnego prawa analitycznego, wyraża się zależnością

$$u = Ri + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i \cdot dt \tag{1}$$

gdzie i — prąd przebiegu nieustalonego lub krócej *prąd nieustalony*.

W stanie ustalonym powyższe wyrażenie przybiera postać

$$u = R \cdot i_w + L \cdot \frac{di_w}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^{t} i_w \cdot dt \tag{2}$$

gdzie i_w — *prąd wymuszony* (ustalony) spełniający zależność $i_w(t) = \lim_{t \to \infty} i(t)$. Wobec tego, zależność (2) jest graniczną postacią zależności (1) przy $t \to \infty$.

Po odjęciu stronami wyrażeń (1) i (2) otrzymamy zależność określającą *prąd przejściowy* $i_p = i - i_w$, nazywany również *swobodnym*

$$0 = R \cdot (i - i_w) + L \cdot \frac{d}{dt}(i - i_w) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} (i - i_w) \cdot dt \tag{3}$$

lub

$$0 = R \cdot i_p + L \cdot \frac{di_p}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i_p \cdot dt \tag{4}$$

Napięcia przejściowe u_{Rp}, u_{Lp}, u_{Cp} na elementach R, L, C spełniają więc zależność

$$0 = u_{Rp} + u_{Lp} + u_{Cp}$$

gdzie:

$$u_{Rp} = R \cdot i_p\,; \qquad u_{Lp} = L \cdot \frac{di_p}{dt}\,; \qquad u_{Cp} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i_p \cdot dt$$

Wszystkie napięcia przejściowe w obwodzie szeregowym równoważą się w danej chwili; są one funkcjami prądu przejściowego i_p.

Z powyższych rozważań wynika, że w obwodach linearnych prąd lub napięcie nieustalone można traktować jako sumę prądu lub napięcia wymuszonego i prądu lub napięcia przejściowego, a więc

$$i = i_w + i_p$$

$$u_R = u_{Rw} + u_{Rp}$$

$$u_L = u_{Lw} + u_{Lp}$$

$$u_C = u_{Cw} + u_{Cp}$$

Ten sposób traktowania prądu lub napięcia nieustalonego jest bardzo wygodny i pozwala na stosunkowo łatwe określenie przebiegu nieustalonego jako sumy przebiegów przejściowego i wymuszonego. Odpowiada to regule rozwiązywania równań różniczkowych niejednorodnych, dla których całka ogólna jest równa sumie rozwiązania ogólnego i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego.

Z podanych wyrażeń różniczkowych wynika, że prąd przejściowy i_p wyznacza się jako rozwiązanie ogólne równania (4), zaś prąd wymuszony i_w — z równania (2).

W przypadku znajdowania zależności określających przebiegi nieustalone w impulsowych miernikach lampowych o prostowaniu szczytowym będziemy stosować w zasadzie metodę klasyczną polegającą na całkowaniu równań różniczkowych, określających prądy i napięcia w obwodzie, a stałe całkowania będziemy określać z warunków początkowych, tj. z napięć i prądów nieustalonych w chwili początkowej, $t = 0$.

3. ELEKTRYCZNE PRZEBIEGI NIEUSTALONE W IMPULSOWYM MIERNIKU LAMPOWYM O PROSTOWANIU SZCZYTOWYM

3.1. Zakres przewodzenia diody

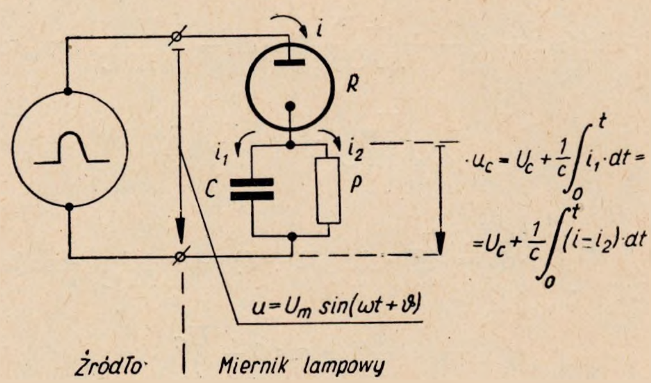
3.1.1. Wyprowadzenie wzorów ścisłych na prąd $i(t)$ i napięcie $u_C(t)$

Miernik lampowy o prostowaniu szczytowym w układzie szeregowym pracuje według schematu podanego na rys. 1.

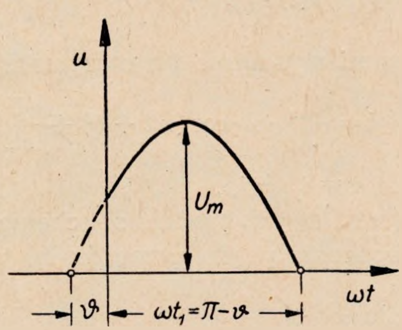
Jako napięcie mierzone przyjmujemy napięcie w postaci impulsu sinusoidalnego $u = U_m \sin(\omega t + \vartheta)$ o czasie trwania od 0 do t_1, co odpowiada kątom 0 i $\omega t_1 = \pi - \vartheta$. W chwili włączenia miernika ($t = 0$) faza impulsu jest równa ϑ.

Oporność R diody w kierunku przepustowym uważamy za niezależną od napięcia działającego pomiędzy anodą i katodą lampy. Przez lampę, w przypadku dodatniej różnicy potencjałów między anodą i katodą, przepływa prąd zmienny i. Prąd ten jest równy sumie chwilowych wartości prądów $(i_1 + i_2)$, z których prąd i_1 powoduje ładowanie kondensatora, prąd zaś i_2 przepływa przez oporność P, która jest np. opornością woltomierza magnetoelektrycznego. Woltomierz magnetoelektryczny mierzy napięcie u_C, które jest sumą napięcia początkowego U_C, jakie może powstać wskutek częściowego naładowania kondensatora przed chwilą $t = 0$, i napięcia $\frac{1}{C}\int_0^t i_1 \cdot dt$, jakie powstaje na kondensatorze ładowanym prądem i_1.

a)



b)



Rys. 1. Miernik lampowy o prostowaniu szczytowym w układzie szeregowym: a) układ; b) kształt impulsu mierzonego

Zgodnie z rys. 1 prąd i wynosi

$$i = \frac{U_m \cdot \sin(\omega t + \vartheta) - U_C - \frac{1}{C}\int_0^t (i - i_2) \cdot dt}{R} \tag{5}$$

lub

$$i = \frac{U_m \cdot \sin(\omega t + \vartheta) - i_2 P}{R} \tag{6}$$

Z wyrażenia (6) otrzymamy

$$i R = U_m \cdot \sin(\omega t + \vartheta) - i_2 P$$

oraz

$$i_2 = \frac{U_m}{P} \cdot \sin(\omega t + \vartheta) - \frac{R}{P} \cdot i \tag{7}$$

Podstawiając do wyrażenia (5) wartość i_2 z wyrażenia (7) otrzymamy

$$i = \frac{U_m}{R} \cdot \sin(\omega t + \vartheta) - \frac{R + P}{RPC} \int_0^t i \cdot \mathrm{d}t - \frac{U_m}{\omega RPC} \cos(\omega t + \vartheta) +$$
$$+ \frac{U_m}{\omega RPC} \cdot \cos\vartheta - \frac{U_C}{R}$$

lub

$$i + \frac{R + P}{RPC} \int_0^t i \cdot \mathrm{d}t = \frac{U_m}{R} \cdot \sin(\omega t + \vartheta) - \frac{U_m}{\omega RPC} \cdot \cos(\omega t + \vartheta) +$$
$$+ \frac{U_m}{\omega RPC} \cos\vartheta - \frac{U_C}{R} \tag{8}$$

W chwili $t = 0$ zgodnie z wyrażeniem (5) mamy

$$i(0) = \frac{U_m \cdot \sin\vartheta - U_C}{R} \tag{9}$$

Różniczkując stronami wyrażenie (8) otrzymamy

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R + P}{RPC} i = \frac{U_m}{R} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \vartheta) + \frac{U_m}{RPC} \cdot \sin(\omega t + \vartheta) \tag{10}$$

Prąd całkowity jest $i = i_p + i_w$.

Prąd wymuszony (ustalony) i_w zgodnie ze schematem podanym na rys. 1 (dla półokresu przewodzenia prądu przez diodę) wynosi

$$i_w = \frac{U_m}{Z} \cdot \sin(\omega t + \vartheta - \varphi) = \frac{U_m}{(R + P)^2 + \omega^2 R^2 P^2 C^2} \cdot$$
$$\cdot [\omega P^2 C \cdot \cos(\omega t + \vartheta) + (R + P + \omega^2 RP^2 C^2) \cdot \sin(\omega t + \vartheta)]. \tag{11}$$

Zgodnie z wyrażeniem (10) napiszemy

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R + P}{RPC} i = \frac{\mathrm{d}(i_p + i_w)}{\mathrm{d}t} + \frac{R + P}{RPC} (i_p + i_w) =$$
$$= \frac{U_m}{R} \omega \cdot \cos(\omega t + \vartheta) + \frac{U_m}{RPC} \sin(\omega t + \vartheta) \tag{12}$$

Ponieważ na podstawie wyrażenia (11) otrzymamy

$$\frac{di_w}{dt} + \frac{RP}{RPC} i_w = \frac{U_m}{RPC} \cdot \sin(\omega t + \vartheta) + \frac{U_m}{R} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \vartheta),$$

więc z wyrażenia (12) wynika, że

$$\frac{di_p}{dt} + \frac{R+P}{RPC} i_p = 0 \tag{13}$$

czyli

$$\frac{di_p}{i_p} = - \frac{R+P}{RPC} \cdot dt$$

oraz

$$i_p = D \cdot e^{-\frac{R+P}{RPC} \cdot t}$$

Stałą całkowania D określimy później z warunków początkowych. Prąd nieustalony i jako suma prądu przejściowego i_p i prądu wymuszonego i_w wynosi

$$i = i_p + i_w = D \cdot e^{-\frac{R+P}{RPC} \cdot t} + \frac{U_m}{(R+P)^2 + \omega^2 R^2 P^2 C^2} \cdot$$

$$\cdot [\omega P^2 C \cos(\omega t + \vartheta) + (R + P + \omega^2 RP^2 C^2) \sin(\omega t + \vartheta)] \tag{14}$$

W celu znalezienia stałej D określimy z wyrażenia (14) wartość $i(0)$ dla $t = 0$.

$$i(0) = D + \frac{U_m}{(R+P)^2 + \omega^2 R^2 P^2 C^2} \cdot$$

$$\cdot [\omega P^2 C \cdot \cos\vartheta + (R + P + \omega^2 \cdot RP^2 C^2) \cdot \sin\vartheta].$$

Zgodnie z wyrażeniem (9) napiszemy

$$i(0) = D + \frac{U_m}{(R+P)^2 + \omega^2 R^2 P^2 C^2} \cdot [\omega P^2 C \cdot \cos\vartheta +$$

$$+ (R + P + \omega^2 RP^2 C^2) \cdot \sin\vartheta] = \frac{U_m}{R} \cdot \sin\vartheta - \frac{U_C}{R}$$

stąd stała D wynosi

$$D = \frac{U_m}{R} \cdot \sin\vartheta - \frac{U_C}{R} - \frac{U_m}{(R+P)^2 + \omega^2 R^2 P^2 C^2} \cdot$$

$$\cdot [\omega P^2 C \cdot \cos\vartheta + (R + P + \omega^2 RP^2 C^2) \cdot \sin\vartheta] \tag{15}$$

Podstawiając wartość stałej D z wyrażenia (15) do wyrażenia (14), po dokonaniu prostych przeróbek, otrzymamy wzór końcowy na prąd nieustalony i

$$i = \frac{U_m \cdot \omega C}{(R+P)^2 + \omega^2 R^2 P^2 C^2} \cdot \Bigg\{ P^2 \cdot \cos(\omega t + \vartheta) + \\ + \frac{R + P + \omega^2 RP^2 C^2}{\omega C} \cdot \sin(\omega t + \vartheta) - \Bigg[P^2 \cdot \cos\vartheta + \\ + \frac{R + P + \omega^2 RP^2 C^2}{\omega C} \cdot \sin\vartheta \Bigg] \cdot e^{-\frac{R+P}{RPC} \cdot t} \Bigg\} + \\ + \left[\frac{U_m}{R} \cdot \sin\vartheta - \frac{U_C}{R} \right] \cdot e^{-\frac{R+P}{RPC} \cdot t} \tag{16}$$

Napięcie u_C na kondensatorze możemy wyznaczyć z zależności $u_C = i_2 \cdot P$.

Korzystając z wyrażenia (7) i wyrażenia (16) po przeróbkach otrzymamy

$$u_C = i_2 P = U_m \cdot \frac{R \omega C}{(R+P)^2 + \omega^2 R^2 P^2 C^2} \cdot \\ \cdot \Bigg\{ \frac{P(P+R)}{R \omega C} \cdot \sin(\omega t + \vartheta) - P^2 \cdot \cos(\omega t + \vartheta) + \\ + \Bigg[P^2 \cdot \cos\vartheta + \frac{R + P + \omega^2 RP^2 C^2}{\omega C} \cdot \sin\vartheta \Bigg] \cdot e^{-\frac{P+R}{RPC} \cdot t} \Bigg\} - \\ - \Big[U_m \cdot \sin\vartheta - U_C \Big] \cdot e^{-\frac{P+R}{RPC} \cdot t} \tag{17}$$

Wyrażenie (17) można również otrzymać po wykonaniu działania

$$u_C = U_C + \frac{1}{C} \int_0^t (i - i_2) \cdot dt$$

lub

$$u_C = U_m \cdot \sin(\omega t + \vartheta) - iR$$

Stosując do wyrażenia (13) przekształcenie Laplace'a-Carsona otrzymujemy

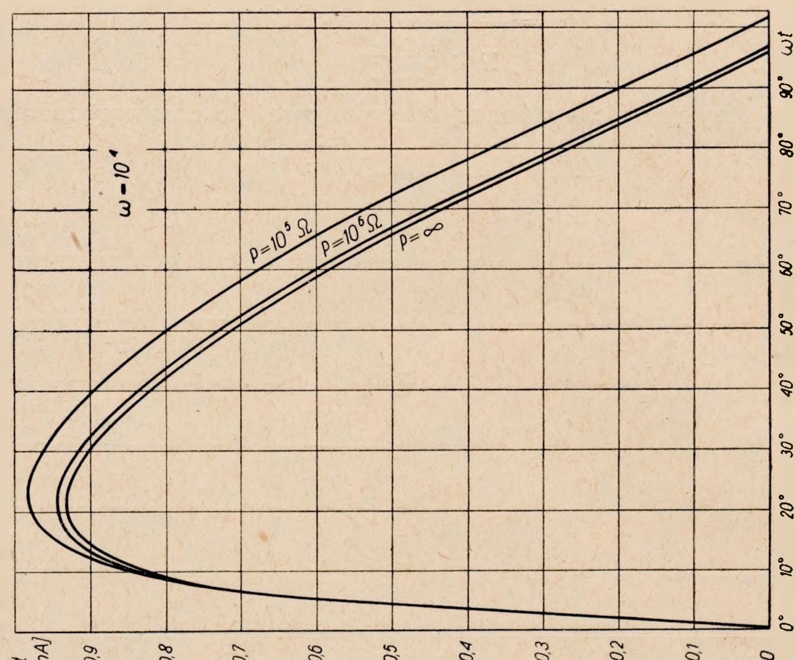
$$p \cdot \bar{i}_p(p) - p \cdot i_p(0) + \frac{R+P}{RPC} \cdot \bar{i}_p(p) = 0$$

gdzie

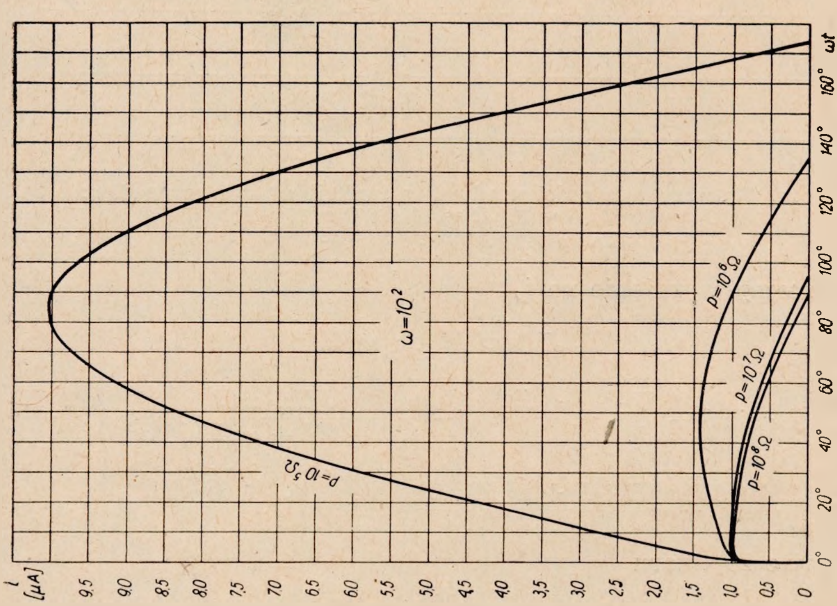
$$i_p(0) = i(0) - i_w(0) = \frac{U_m \cdot \sin\vartheta - U_C}{R} - \\ - \frac{U_m}{(R+P)^2 + \omega^2 R^2 P^2 C^2} \cdot [\omega P^2 C \cdot \cos\vartheta + (R + P + \omega^2 RP^2 C^2) \cdot \sin\vartheta]$$

Mamy więc

$$\bar{i}_p(p) \cdot \left(p + \frac{R+P}{RPC} \right) = p \cdot i_p(0)$$



Rys. 2b. Wykresy zależności prądu i w funkcji ωt dla przypadku: $U_m = 10$ V; $\vartheta = 0°$; R $= 10^3\,\Omega$; C $= 10^{-8}$ F; dla $\omega = 10^4$ oraz $P = 10^5$, 10^6, $\infty\,\Omega$



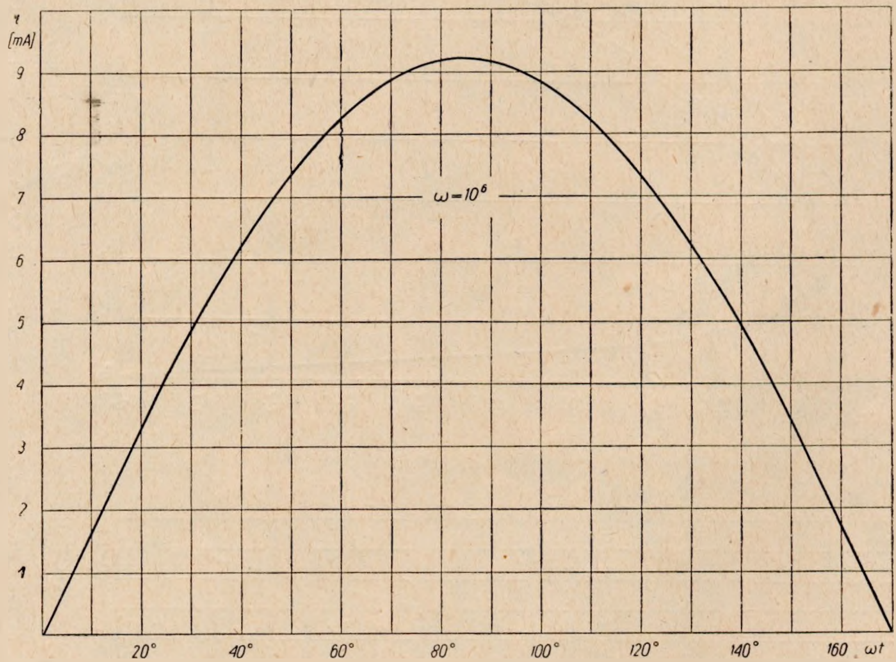
Rys. 2a. Wykresy zależności prądu i w funkcji ωt dla przypadku: $U_m = 10$ V; $\vartheta = 0°$; $R = 10^3\,\Omega$; $C = 10^{-8}$ F; dla $\omega = 10^2$ oraz $P = 10^6$; 10^7; $10^8\,\Omega$

oraz

$$\bar{i}_p(p) = \frac{p}{p + \frac{R+P}{RPC}} \cdot i_p(0)$$

Ponieważ przy przejściu z funkcji operatorowej do czasowej mamy

$$\frac{p}{p + \frac{R+P}{RPC}} = e^{-\frac{R+P}{RPC} \cdot t}$$



Rys. 2c. Wykresy zależności prądu i w funkcji ωt dla przypadku: $U_m = 10$ V; $\vartheta = 0°$; $R = 10^3\,\Omega$; $C = 10^{-8}$ F; dla $\omega = 10^6$ oraz $P = \infty$

więc otrzymamy wyrażenie na i_p

$$i_p = e^{-\frac{R+P}{RPC} \cdot t} \cdot i_p(0) =$$

$$= \left[\frac{U_m}{R} \cdot \sin\vartheta - \frac{U_C}{R}\right] \cdot e^{-\frac{P+R}{RPC} \cdot t} - \frac{U_m \cdot \omega C}{(R+P)^2 + \omega^2 R^2 P^2 C^2} \left[P^2 \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \cos\vartheta + \frac{R + P + \omega^2 RP^2 C^2}{\omega C} \cdot \sin\vartheta\right] \cdot e^{-\frac{P+R}{RPC} \cdot t}$$

Korzystając ze wzoru

$$i = i_p + i_w$$

oraz ze wzoru (11) określającego i_w otrzymamy wzór identyczny do (16).

Na rys. 2 podano przebieg prądu i w funkcji ωt dla przypadku: $U_m = 10$ V; $\vartheta = 0^\circ$; $R = 10^3\ \Omega$; $C = 10^{-8}$ F i kilku wartości P oraz pulsacji ω.

3.1.2. Wzory przybliżone

Uzyskane wyrażenia (16) i (17) na prąd i oraz napięcie u_C są dość skomplikowane. W związku z tym istnieje trudność w ich wykorzystywaniu do dalszych rozważań.

Ponieważ jednak w praktyce pomiarowej oporność P jest znacznie większa od oporności R, można więc te wyrażenia uprościć pomijając w przypadku sumy $(R+P)$ składnik R.

Dla $R \ll P$ otrzymujemy więc

$$i \approx \frac{U_m}{R} \cdot \frac{\omega \tau_R}{1+\omega^2 \tau_R^2} \cdot \left\{ \frac{1+\omega^2 \tau_R \tau_P}{\omega \tau_P} \cdot \sin(\omega t + \vartheta) + \cos(\omega t + \vartheta) - \left[\cos\vartheta + \frac{1+\omega^2 \tau_R \tau_P}{\omega \tau_P} \cdot \sin\vartheta \right] \cdot e^{-t/\tau_R} \right\} + \left[\frac{U_m}{R} \cdot \sin\vartheta - \frac{U_C}{R} \right] \cdot e^{-t/\tau_R} \tag{18}$$

Podobnie

$$u_{CP} \approx U_m \cdot \frac{\omega \tau_R}{1+\omega^2 \tau_R^2} \left\{ \frac{\sin(\omega t + \vartheta)}{\omega \tau_R} - \cos(\omega t + \vartheta) + \left[\cos\vartheta + \frac{1+\omega^2 \tau_R \tau_P}{\omega \tau_P} \cdot \sin\vartheta \right] \cdot e^{-t/\tau_R} \right\} - \left[U_m \cdot \sin\vartheta - U_C \right] \cdot e^{-t/\tau_R} \tag{19}$$

Przez τ_R i τ_P oznaczono stałe czasowe:

$$\tau_R = RC\,; \quad \tau_P = PC.$$

W praktyce stosowane są następujące wartości elementów

$$R = 10^3 \Omega\,; \quad P = 10^5 \ldots 10^8 \Omega\,; \quad C = 10^{-8} \text{F}$$

Otrzymamy więc:

$$\tau_R = RC = 10^3 \cdot 10^{-8} = 10^{-5} \text{sek}$$

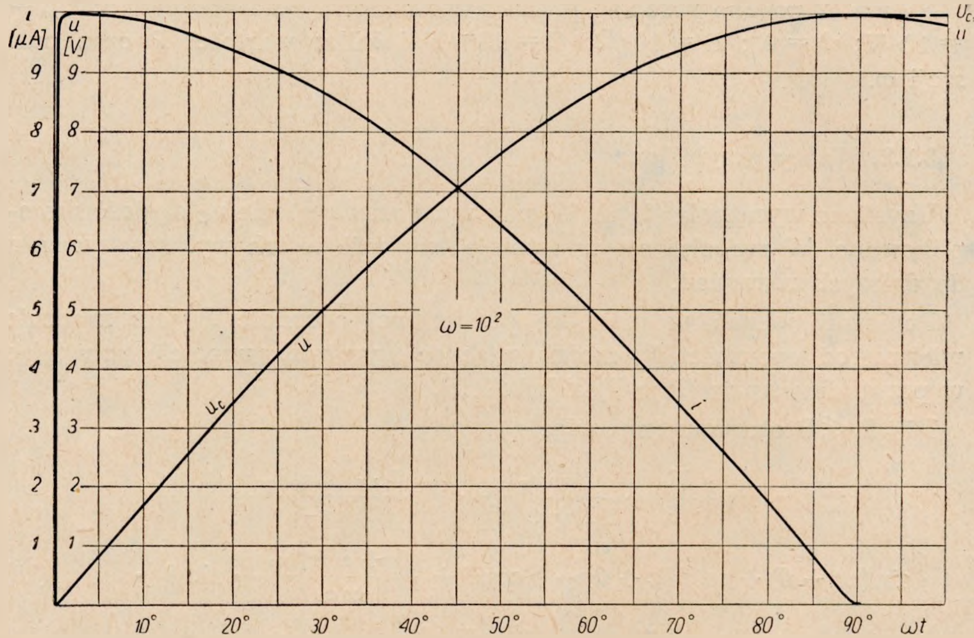
$$\tau_P = PC = 10^{-3} \ldots 1 \text{ sek}$$

Ponieważ ponadto dla woltomierzy lampowych można przyjąć

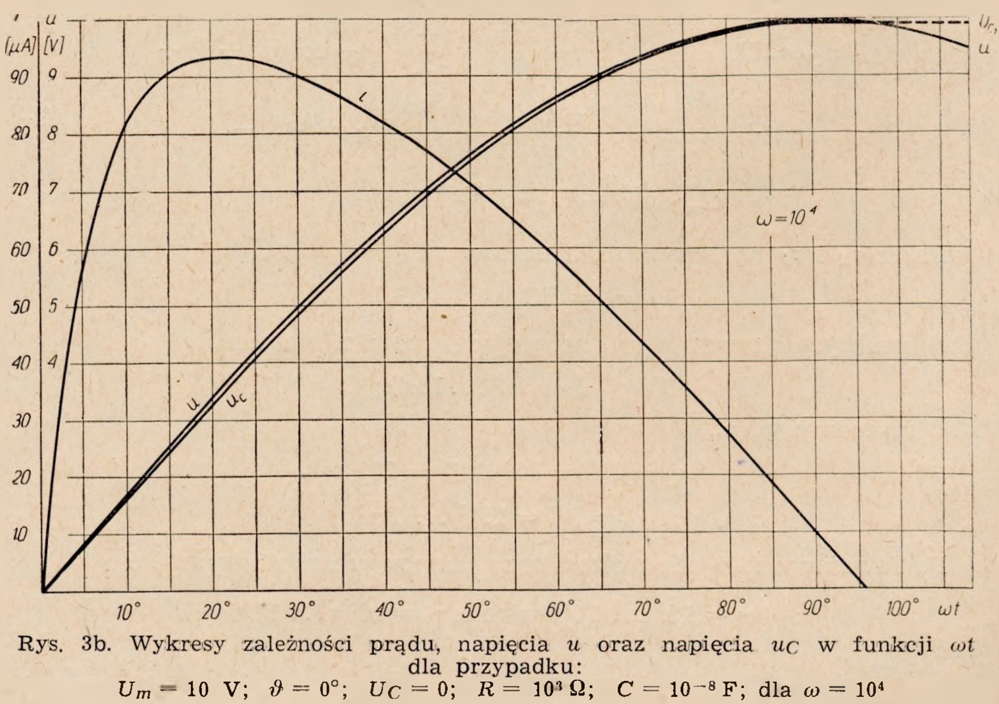
$$\omega = 10^2 \ldots 10^8, \text{ więc } \omega \tau_P = 10^{-1} \ldots 10^8$$

zaś

$$\omega \tau_R = 10^{-3} \ldots 10^3$$



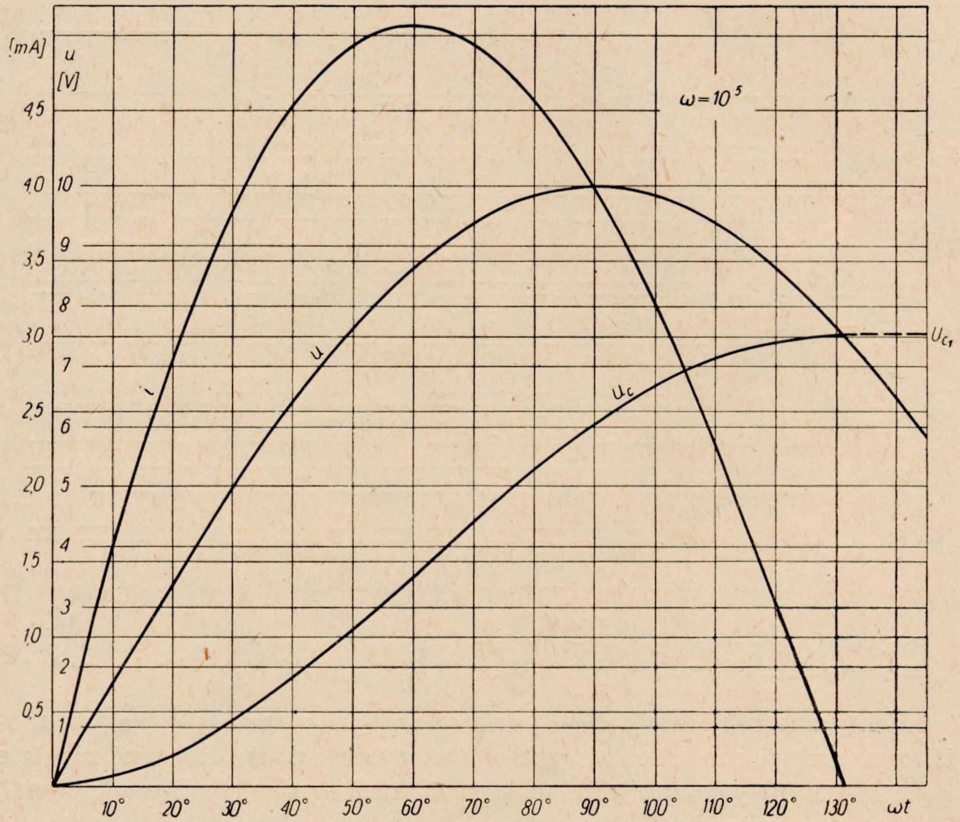
Rys. 3a. Wykresy zależności prądu, napięcia u oraz napięcia u_C w funkcji ωt dla przypadku:
$U_m = 10$ V; $\vartheta = 0°$; $U_C = 0$; $R = 10^3\ \Omega$; $C = 10^{-8}$ F; dla $\omega = 10^2$



Rys. 3b. Wykresy zależności prądu, napięcia u oraz napięcia u_C w funkcji ωt dla przypadku:
$U_m = 10$ V; $\vartheta = 0°$; $U_C = 0$; $R = 10^3\ \Omega$; $C = 10^{-8}$ F; dla $\omega = 10^4$

Przy takich wartościach $\omega\tau_R$ i $\omega\tau_P$ nie ma podstaw do dalszego uproszczenia wzorów na prąd i oraz napięcia u_C w ogólnym rozwiązaniu.

W celu zobrazowania zależności i (ωt) oraz u_C (ωt) podano ich wykresy dla pulsacji $\omega = 10^2$; 10^4; 10^5; 10^8; przyjmując $U_C = 0$. Wykresy zostały podane przy wartościach $R = 10^3\ \Omega$; $C = 10^{-8}$ F, dla $\vartheta = 0$ (rys. 3). Przypadek ten jest w praktyce najważniejszy.



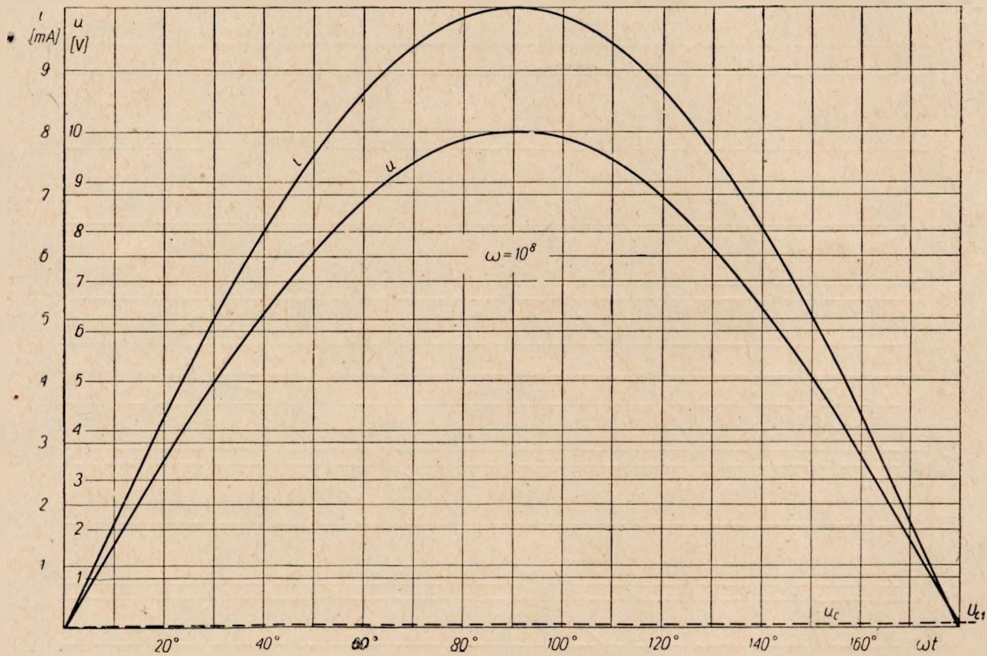
Rys. 3c. Wykresy zależności prądu, napięcia u oraz napięcia u_C w funkcji ωt dla przypadku: $U_m = 10$ V; $\vartheta = 0°$; $U_C = 0$; $R = 10^3\ \Omega$; $C = 10^{-8}$ F: dla $\omega = 10^5$

3.1.3. Analiza wykresów dla przypadku $\vartheta = 0$

Z analizy wykresów podanych na rys. 3 wynika, że w przypadku $\vartheta = 0$ wszystkie krzywe $i\,(\omega t)$ zaczynają się od prądu $i = 0$ dla $\omega t = 0$, przechodzą przez jedno maksimum i kończą się w zakresie kąta $90° < \omega t < 180°$, przyjmując ponownie wartość $i = 0$ przy $\omega t_1 > 0$.

Ta druga wartość $i = 0$ odpowiada chwili t_1, przy której kończy się ładowanie kondensatora C przez diodę, powodowane pierwszym impulsem prądu. Ustalenie chwili t_1 i napięcia U_{C1}, do którego kondensator zdoła naładować się, jest rzeczą bardzo ważną ze względu na pracę impulsowych woltomierzy lampowych.

Licząc od chwili t_1 rozpoczyna się proces rozładowywania kondensatora C przez opornik P. Proces ten trwa przez półokres nieprzewodzenia diody i przechodzi częściowo na następny półokres.



Rys. 3d. Wykresy zależności prądu, napięcia u oraz napięcia u_C w funkcji ωt dla przypadku: $U_m = 10$ V; $\vartheta = 0°$; $U_C = 0$; $R = 10^3\,\Omega$; $C = 10^{-8}$ F: dla $\omega = 10^8$

Analityczne ustalenie kąta ωt_1 lub czasu t_1 ze wzoru (18) nie jest możliwe ze względu na nierozwiązalność takiego równania. Również nie daje się rozwiązać wyrażenie uproszczone, w którym przyjęto $U_C = 0$, $\vartheta = 0$, a więc wyrażenie

$$i = \frac{U_m}{R} \cdot \frac{\omega \tau_R}{1 + \omega^2 \tau_R^2} \cdot \left\{ \frac{1 + \omega^2 \tau_R \tau_P}{\omega \tau_P} \cdot \sin \omega t + \cos \omega t - e^{-t/\tau_R} \right\} = 0 \tag{20}$$

gdzie jako składniki występują jednocześnie funkcje trygonometryczne i wykładnicze.

Wyznaczenie pierwiastka t_1 tego wyrażenia może być w ogólnym przypadku określone na podstawie wykresu prądu $i(\omega t)$. Przy obliczaniu tego wykresu zwrócono specjalną uwagę na dokładne obliczenie kąta ωt_1, zachowując dokładność $1'$. Krzywe $i(\omega t)$ zostały wykreślone w postaci rodzin charakterystyk dla $\omega = \text{const}$, przy obieranym parametrze $P = 10^5$; 10^6; 10^7; 10^8; ∞.

Jeżeli przyjąć takie warunki pracy układu, że stała czasowa ładowania τ_R jest znacznie mniejsza od okresu T, to składnik e^{-t/τ_R} wyrażenia (20) szybko malejący do zera będzie odgrywał rolę jedynie przy małych wartościach kąta ωt, natomiast na przebieg funkcji $i(\omega t)$ w okolicy kąta ωt_1 (gdy $i = 0$) praktycznie biorąc nie będzie wpływał.

W przypadku $\tau_R = RC = 10^3 \cdot 10^{-8} = 10^{-5}$ sek można przyjąć, że okres T mierzonego napięcia $u = U_m \cdot \sin \omega t$ jest znacznie większy od stałej czasowej ładowania τ_R dla pulsacji mniejszych od $\omega = 10^4$. Dla $\omega = 10^4$ okres T wynosi 628 μ sek, a więc jest znacznie większy od $\tau_R = 10$ μ sek.

W takich warunkach pracy układu możemy przyjąć, że przy wyznaczaniu kąta ωt_1 obowiązuje zależność

$$i(t_1) \approx \frac{U_m}{R} \cdot \frac{\omega \tau_R}{1 + \omega^2 \tau_R^2} \cdot \left\{ \frac{1 + \omega^2 \tau_R \tau_P}{\omega \tau_P} \cdot \sin \omega t_1 + \cos \omega t_1 \right\} = 0 \tag{21}$$

Z równania (21) otrzymamy

$$\operatorname{tg} \omega t_1 = - \frac{\omega \tau_P}{1 + \omega^2 \tau_R \tau_P}$$

a więc

$$\omega t_1 = \operatorname{arc\,tg} \left(- \frac{\omega \tau_P}{1 + \omega^2 \tau_R \tau_P} \right) = \operatorname{arc\,tg} \left(- \frac{\omega PC}{1 + \omega^2 RPC^2} \right) \tag{22}$$

Znak „—” wskazuje, że kąt ωt_1 jest zawarty w drugiej ćwiartce. Ponadto możemy wyznaczyć czas t_1, przy którym prąd $i(t_1) = 0$.

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \cdot \operatorname{arc\,tg} \left(- \frac{\omega \tau_P}{1 + \omega^2 \tau_R \tau_P} \right) = \frac{1}{\omega} \operatorname{arc\,tg} \left(- \frac{\omega PC}{1 + \omega^2 R PC^2} \right) \tag{23}$$

Korzystając ze wzoru (22) możemy wyznaczyć charakterystyki $\omega t_1 = f(P)$, przy stałych wartościach ω oraz obranych wartościach R i C.

Rodzinę charakterystyk $\omega t_1 = f(P)$ obliczonych dla $\omega = 10^2$; 10^3; 10^4; $2 \cdot 10^4$ i przy $R = 10^3\ \Omega$, $C = 10^{-8}$ F przedstawiono na rys. 4. Im mniejsza wartość oporności P, tym bardziej kąt ωt_1 zdąża do wartości $\pi = 180°$, osiągając ją w granicznym przypadku, gdy $P = 0$. W pracy woltomierzy lampowych ten graniczny przypadek nie ma zastosowania.

Przy $P = \infty$ otrzymamy

$$\lim_{P \to \infty} \omega t_1 = \lim_{P \to \infty} \left[\operatorname{arc\,tg} \left(- \frac{\omega PC}{1 + \omega^2 RPC^2} \right) \right] = \operatorname{arc\,tg} \left(- \frac{1}{\omega RC} \right)$$

Jeżeli np.

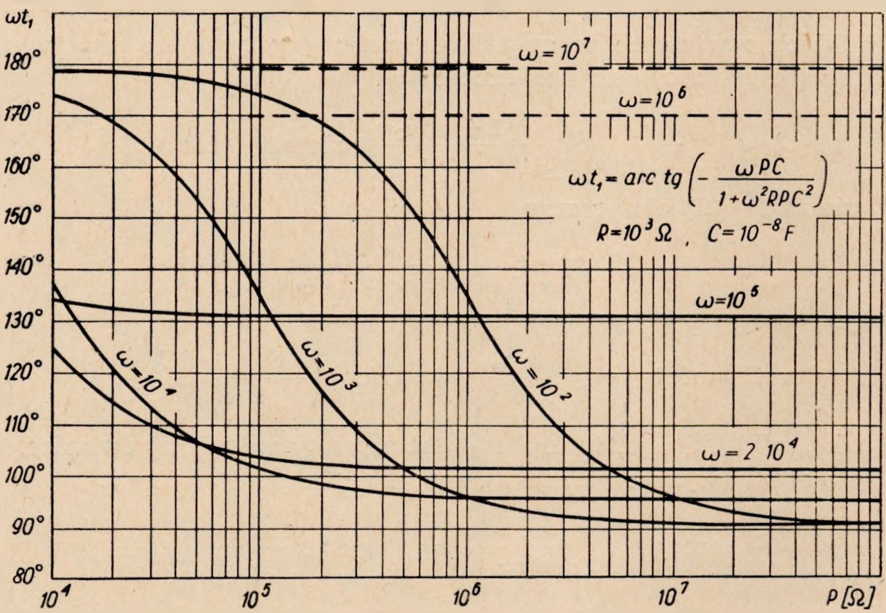
$$\omega = 10^2\,; \quad R = 10^3\,; \quad C = 10^{-8}$$

to otrzymamy

$$\lim_{P \to \infty} \omega t_1 = \operatorname{arc\,tg} \left(- \frac{1}{10^2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-8}} \right) = \operatorname{arc\,tg}(-1000) = 90° 03' \ldots 90° 04'$$

Otrzymany wynik zgadza się z wynikiem ustalonym na podstawie rys. 3a, dla $P = \infty$.

W przypadku pulsacji $\omega = 10^5$; 10^6; 10^7; 10^8, wskutek zmniejszenia się okresu T napięcia sinusoidalnego, uzyskuje się współmierność okresu T ze stałą czasową $\tau_R = RC$. Wówczas wpływ składnika e^{-t/τ_R} we wzorze (20) staje się na tyle duży, że nie można go pominąć przy wyznaczaniu kąta ωt_1. W związku z tym nie możemy korzystać ze wzorów (22) i (23), a kąty ωt_1 ustalamy z poszczególnych wykresów podanych na rys. 3.



Rys. 4. Wykres zależności $\omega t_1 = f(P)$ przy stałych wartościach ω, R, C

Gdy $\tau_R = 10^{-5}$ sek, dla pulsacji $\omega = 10^5$ otrzymamy okres $T = 62{,}8$ μsek, który niewiele różni się od stałej czasowej τ_R. Dlatego też wpływ składnika e^{-t/τ_R} na wartość kąta ωt_1 nie może być tu pomijalny. Przy bardzo dużych pulsacjach (gdy $T < \tau_R$) przebieg funkcji $i(\omega t)$ zbliża się do sinusoidalnego, co jest widoczne po napisaniu wyrażenia (20) w postaci

$$i = \frac{U_m}{R} \cdot \frac{\omega \tau_R}{1 + \omega^2 \tau_R^2} \left\{ \left(\frac{1}{\omega \tau_p} + \omega \tau_R \right) \cdot \sin \omega t + \cos \omega t - e^{-t/\tau_R} \right\} \tag{24}$$

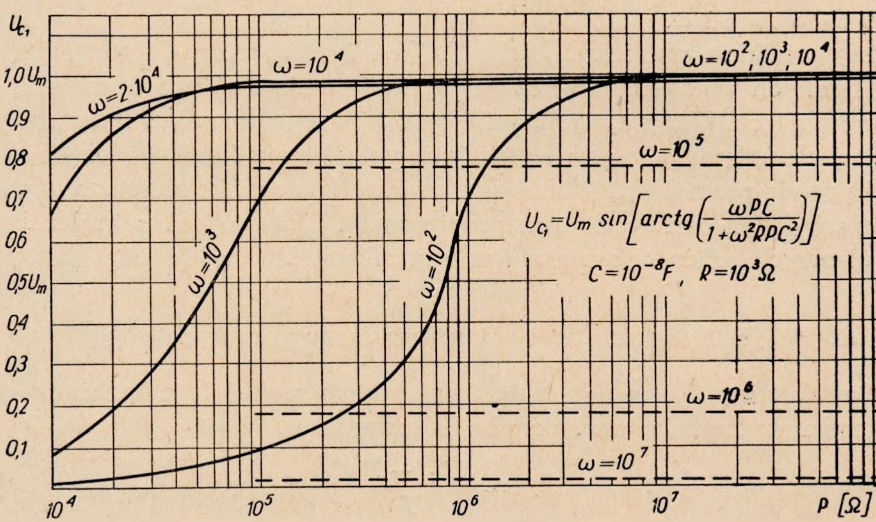
W granicznym przypadku, gdy $\omega \to \infty$, otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\omega \to \infty} i &= \frac{U_m}{R} \cdot \frac{1}{\omega \tau_R} \left\{ \omega \tau_R \cdot \sin \omega t + \cos \omega t - e^{-t/\tau_R} \right\} = \\ &= \frac{U_m}{R} \cdot \sin \omega t + \frac{U_m}{R} \cdot \frac{1}{\infty} (\cos \omega t - e^{-t/\tau_R}) = \frac{U_m}{R} \sin \omega t \end{aligned} \right\} \tag{25}$$

Wynika stąd, że przy dużych pulsacjach kąt $\omega t_1 \to 180°$. W rozważanym przypadku, gdy $\tau_R = 10^{-5}$ sek i dla pulsacji $\omega \geqslant 10^5$ wartość kąta ωt_1 musimy brać z wykresów podanych na rys. 3.

Mając wartość ωt_1 w funkcji oporności P dla różnych pulsacji można wyznaczyć wartości napięć U_{C1}, do których kondensator C zdoła naładować się od pierwszego impulsu prądu. Obliczenie możemy wykonać wg wzoru (19), przyjmując $\vartheta = 0$, $U_C = 0$:

$$U_{C1} = U_m \cdot \frac{\omega \tau_R}{1 + \omega^2 \tau_R^2} \cdot \left\{ \frac{\sin \omega t_1}{\omega \tau_R} - \cos \omega t_1 + e^{-t_1/\tau_R} \right\} \tag{26}$$



Rys. 5. Wykres zależności U_{C1} w funkcji oporności P dla różnych pulsacji ω, gdy $C = 10^{-8}$ F, $R = 10^3\ \Omega$

Dla niewielkich pulsacji ($\omega \leqslant 10^4$) prościej jest jednak korzystać z zależności (22) i wykonywać obliczenia ze wzoru

$$\left.\begin{aligned} U_{C1} &= U_m \cdot \sin \omega t_1 = U_m \cdot \sin \left[\operatorname{arc\,tg} \left(- \frac{\omega \tau_P}{1 + \omega^2 \tau_R \tau_P} \right) \right] = \\ &= U_m \cdot \sin \frac{PC}{\sqrt{\omega^2 P^2 C^2 + (1 + \omega^2 RPC^2)^2}} = U_m \cdot \sin \left[\operatorname{arc\,tg} \left(- \frac{\omega PC}{1 + \omega^2 RPC^2} \right) \right] \end{aligned}\right| \tag{27}$$

zaś dla pulsacji $\omega > 10^4$ wykonać obliczenia ze wzoru

$$U_{C1} = U_m \cdot \sin \omega t_1 \tag{28}$$

biorąc wartość ωt_1 z wykresów podanych na rys. 4. Wzory te wykorzystujemy na podstawie tego, że krzywe $u = U_m \cdot \sin \omega t$ i $u_C(\omega t)$ dla wartości ωt_1 przecinają się.

W szczególnym przypadku, gdy $\omega = 10^2$, $P = \infty$, $R = 10^3\ \Omega$, $C = 10^{-8}$ F otrzymamy

$$U_{C1} = \lim_{P \to \infty} U_m \cdot \sin\left[\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\omega PC}{1+\omega^2 RPC^2}\right)\right] =$$

$$= U_m \cdot \sin\left[\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{\omega RC}\right)\right] =$$

$$= U_m \cdot \sin[\operatorname{arc\,tg}(-1000)] \approx U_m \cdot \sin 90°03' = 0{,}999\,999\,6\, U_m \approx U_m\,,$$

a więc kondensator naładuje się od pierwszego impulsu do wartości prawie równej wartości U_m.

Na rys. 5 podano wykresy napięcia U_{C1} w funkcji oporności P, dla różnych pulsacji ω.

Przy wielkich pulsacjach, gdy $T \leqslant \tau_R$, kondensator C ładuje się do nieznacznych wartości, w związku z tym jest nie możliwe dokonanie pomiaru napięcia U_m przy działaniu tylko jednego impulsu. Przy małych pulsacjach, gdy $T \gg \tau_R$, pojedynczy impuls ładuje kondensator do wartości prawie równej U_m. W związku z tym pomiar maksymalnego napięcia impulsu jest możliwy do przeprowadzenia. Dlatego też w miernikach impulsowych praca odbywa się w warunkach $T \gg \tau_R$.

3.1.4. Uchyb ładowania w woltomierzach impulsowych

Wprowadzimy pojęcie uchybu względnego powstałego wskutek niepełnego naładowania, tzw. uchybu ładowania

$$\Delta_l = \frac{U_{C1} - U_m}{U_m} \tag{29}$$

W przypadku małych pulsacji ($T \gg \tau_R$) zgodnie z wyrażeniem (27) otrzymamy

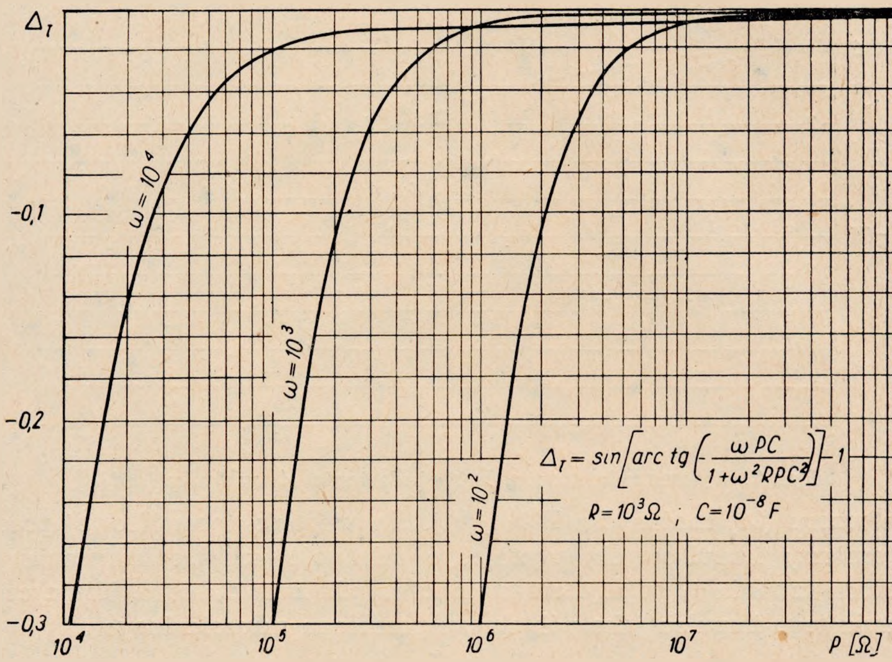
$$\left.\begin{aligned} \Delta_l = \frac{U_{C1} - U_m}{U_m} &= \frac{U_m \cdot \sin\left[\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\omega PC}{1+\omega^2 RPC^2}\right)\right] - U_m}{U_m} = \\ &= \sin\left[\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\omega PC}{1+\omega^2 RPC^2}\right)\right] - 1 \end{aligned}\right| \tag{30}$$

W przypadku większych pulsacji należy uchyb ten wyznaczyć ze wzoru (29), biorąc wartość U_{C1} z rys. 5.

Na rys. 6 podano przebieg charakterystyk uchybu ładowania w zakresie małych częstotliwości ($\omega = 10^2$; 10^3; 10^4), w funkcji oporności P, przy $R = 1000\,\Omega$ i $C = 10^{-8}$ F. Wówczas, dla przypadku $\omega = 10^4$ mamy $T' = 2\pi \cdot 10^{-4}$, natomiast $\tau_R = RC = 10^{-5} \ll T'$.

Przy większych częstotliwościach ($\omega > 10^4$) dla $R = 1000\,\Omega$ uchyb ładowania na tyle wzrasta, że pomiar napięcia powstałego od pojedynczego impulsu traci sens. Uchyb ładowania jest ściśle związany z kątem ładowania ωt_1, gdyż

$$\Delta_l = \frac{U_{C1} - U_m}{U_m} = \frac{U_m \cdot \sin \omega t_1 - U_m}{U_m} = \sin \omega t_1 - 1 \tag{31}$$



Rys. 6. Wykres zależności uchybu ładowania Δ_l w funkcji oporności P dla różnych pulsacji ω, gdy $C = 10^{-8}$ F; $R = 10^3\,\Omega$

Jest to uchyb ujemny, przebiegający w funkcji kąta ωt_1 zgodnie z rys. 7. Przyjmując dopuszczalny maksymalny uchyb ładowania, np. 1%, możemy obliczyć najpierw kąt ωt_1 z zależności

$$\sin \omega t_1 - 1 = -0{,}01$$

stąd

$$\sin \omega t_1 = 0{,}99$$

oraz

$$\omega t_1 = \arcsin 0{,}99 = 98°06'$$

Następnie, dla danej pulsacji możemy obliczyć wymaganą minimalną oporność P. Jeżeli np. przyjmiemy $\omega = 10^2$; $R = 10^3\,\Omega$, $C = 10^{-8}$ F, to

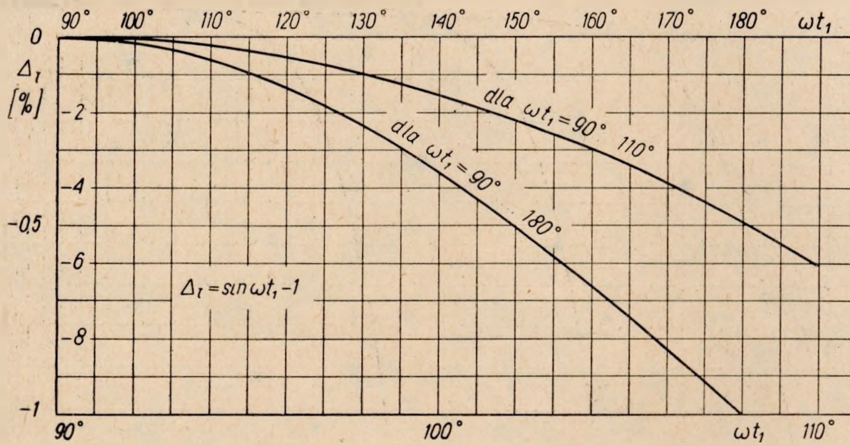
$$\operatorname{arc\,tg}\left(- \frac{\omega PC}{1 + \omega^2 RPC^2}\right) = 98°06'$$

a więc

$$\frac{\omega PC}{1+\omega^2 RPC^2} = 7{,}0264$$

Podstawiając odpowiednie wartości otrzymamy

$$P_{min} = 7{,}03 \cdot 10^6 = 7{,}03\ \mathrm{M\Omega}$$



Rys. 7. Wykres zależności uchybu ładowania Δ_l w funkcji ωt_1

Ze wzoru (30) można dla $T \gg \tau_R$ (tj. dla warunku prawidłowej pracy woltomierzy impulsowych) wyznaczyć zależność uchybu ładowania Δ_l od czasu trwania t_i pojedynczego impulsu półsinusoidalnego, licząc czas trwania tego impulsu jako pół okresu przebiegu sinusoidalnego

$$t_i = \frac{T}{2} = \frac{1}{2f} = \frac{\pi}{\omega} \tag{32}$$

Należy więc do wzoru (30) podstawić $\omega = \frac{\pi}{t_i}$

Dla woltomierzy impulsowych napiszemy więc zależność

$$\Delta_l = \sin\left[\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\omega PC}{1+\omega^2 RPC^2}\right)\right] - 1 = \sin\left[\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\frac{\pi}{t_i} PC}{1+\frac{\pi^2}{t_i^2} RPC^2}\right)\right] - 1 =$$

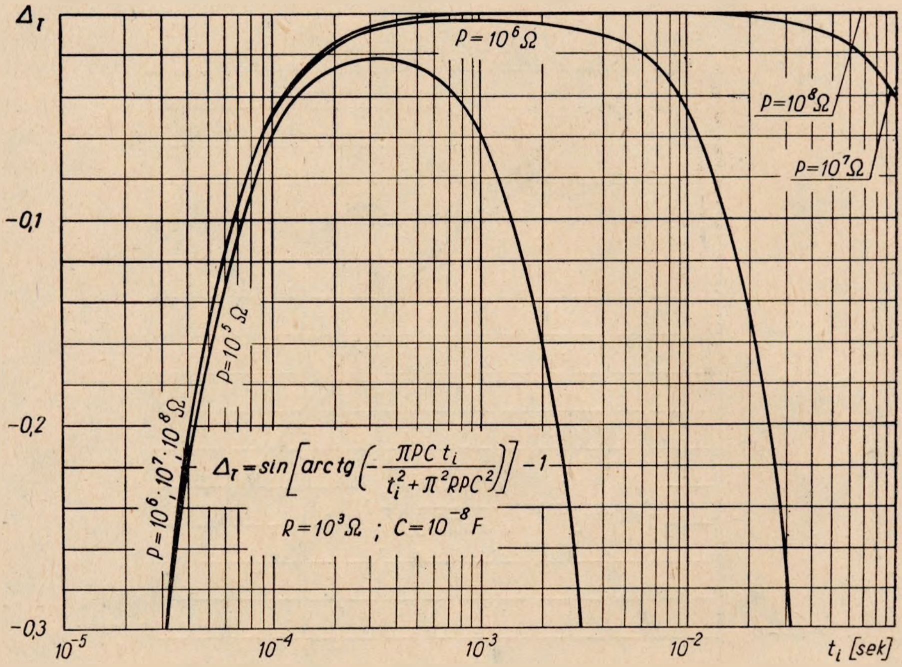
$$= \sin\left[\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\pi\, PC\, t_i}{t_i^2+\pi^2 RPC^2}\right)\right] - 1 = \sin\left[\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\pi \tau_p t_i}{t_i^2+\pi^2 \tau_R \tau_P}\right)\right] - 1 \tag{33a}$$

lub

$$\Delta_l = \sin\left[\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\pi}{t_i/\tau_p + \pi^2 \cdot \frac{\tau_R}{t_i}}\right)\right] - 1 \tag{33b}$$

przyjmując spełnienie zależności $t_i = \frac{T}{2} \gg \tau_R$.

Na rys. 8 podano rodzinę charakterystyk $\Delta_l = f(t_i)$ przy różnych wartościach P lub τ_P, gdy $R = 10^3\,\Omega$, $C = 10^{-8}$ F, ($\tau_R = 10^{-5}$ sek). Z charakterystyk tych wynika, że uchyb ładowania Δ_l przyjmuje małe wartości jedynie w pewnym przedziale czasu trwania t_i impulsu sinusoidalnego.

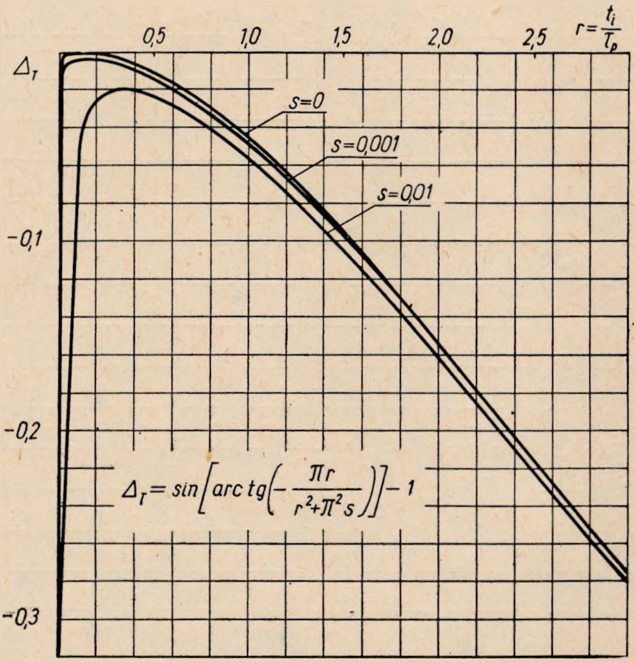


Rys. 8. Wykres zależności uchybu ładowania w funkcji czasu trwania t_i impulsu przy różnych wartościach P oraz przy $R = 10^3\,\Omega$; $C = 10^{-8}$ F

Ze wzoru (33b) wyznaczamy uchyb ładowania jako funkcję stosunku $\frac{t_i}{\tau_P} = r$ oraz stosunku $\frac{\tau_R}{\tau_P} = \frac{R}{P} = S$. Mamy więc

$$\left.\begin{aligned}\Delta_l &= \sin\left[\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\pi}{\frac{t_i}{\tau_P} + \pi^2 \cdot \frac{\tau_R}{t_i}}\right)\right] - 1 = \\ &= \sin\left[\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\pi}{\frac{t_i}{\tau_P} + \pi^2 \frac{S\,\tau_P}{t_i}}\right)\right] - 1 = \\ &= \sin\left[\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\pi \frac{t_i}{\tau_P}}{\frac{t_i^2}{\tau_P^2} + \pi^2 S}\right)\right] - 1 = \\ &= \sin\left[\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\pi \cdot r}{r^2 + \pi^2 S}\right)\right] - 1\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Na rys. 9 przedstawiono rodzinę charakterystyk $\Delta_l = f(r)$ dla różnych wartości S, przy czym wzięto pod uwagę, że stała czasowa ładowania τ_R jest w praktyce znacznie mniejsza od stałej czasowej rozładowania τ_p.



Rys. 9. Rodzina charakterystyk $\Delta_l = f(r)$ dla różnych wartości S, gdzie r jest stosunkiem czasu trwania t_i impulsu do stałej czasowej $\tau_p = PC$, zaś $S = \frac{R}{P}$

Z charakterystyk tych wynika, że dla dużych wartości r (dla $r \geqslant 0{,}3$), o uchybie ładowania mało decyduje wartość parametru S, natomiast uchyb ten wzrasta ze wzrostem r, w przybliżeniu wg funkcji

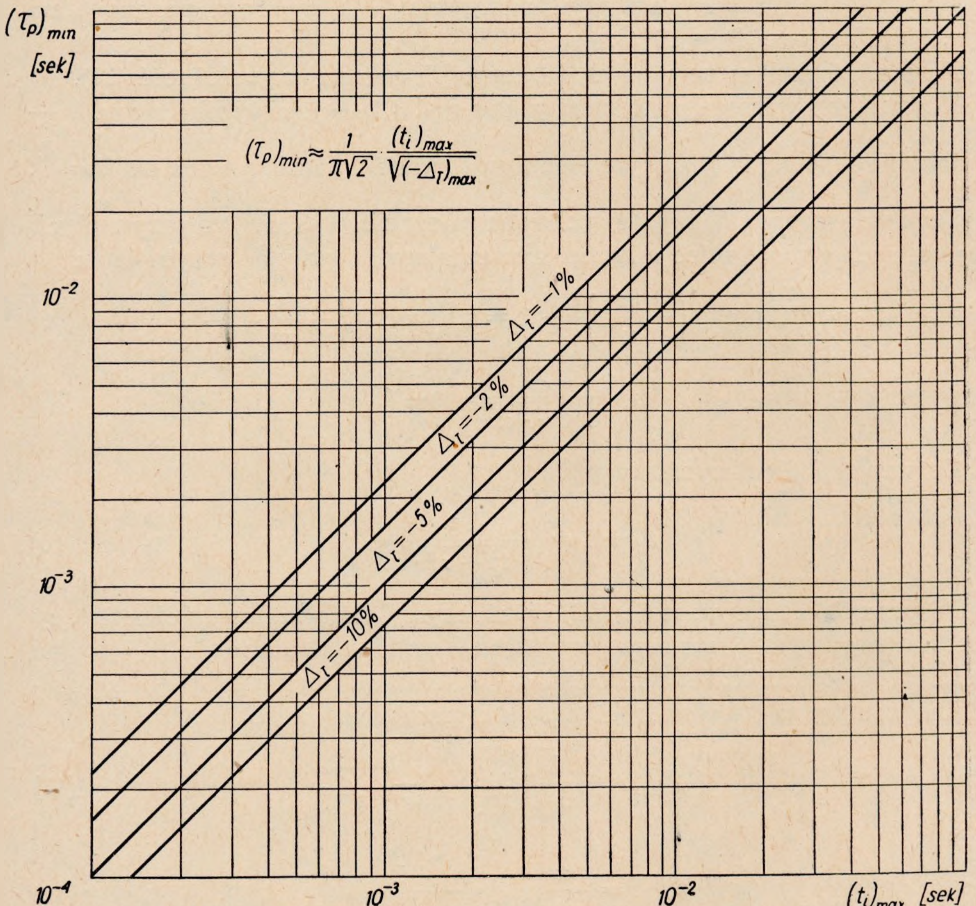
$$\Delta_\tau \doteq \sin\left[\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\pi}{r}\right)\right] - 1 = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + r^2}} - 1 \tag{35}$$

którą wyznacza się z wyrażenia (34) dla przypadku, gdy $S = 0$, tj. gdy $R = 0$.

Dla dużych wartości r, tj. dla impulsów długotrwałych, można wyznaczyć wymaganą minimalną wartość stałej czasowej rozładowania $(\tau_P)_{min}$, dla założonego czasu trwania najdłuższego impulsu $(t_i)_{max}$ i dla maksymalnego dopuszczalnego uchybu ładowania $(\Delta_\tau)_{max}$.

Korzystamy w tym celu ze wzoru (35)

$$\Delta_l + 1 = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \frac{t_i^2}{\tau_p^2}}} = \frac{\pi \cdot \tau_p}{\sqrt{t_i^2 + \pi^2 \cdot \tau_p^2}} \tag{36}$$



Rys. 10. Rodzina charakterystyk $(\tau_p)_{min} = f(t_i)_{max}$ dla różnych wartości Δ_l

Po przeróbkach wyrażenia (36) otrzymamy

$$(\tau_p)_{min} \approx \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{(t_i)_{max}}{\sqrt{(-\Delta_l)_{max}}} \tag{37}$$

lub

$$(t_i)_{max} \approx \pi\sqrt{2} \cdot \sqrt{(-\Delta_l)_{max}} \cdot (\tau_p)_{min} \tag{38}$$

Ze wzoru (37) można więc wyznaczyć minimalną stałą czasową $(\tau_p)_{min}$ rozładowania, zaś ze wzoru (38) maksymalny czas trwania impulsu $(t_i)_{max}$ dla dopuszczalnego maksymalnego uchybu ładowania $(\Delta_l)_{max}$

Pragnąc np. obliczyć maksymalny czas trwania impulsu $(t_i)_{max}$ dla dopuszczalnego uchybu $(\Delta_l)_{max} = -0{,}04$ przy stałej czasowej $\tau_p = PC = 10^7 \cdot 10^{-8} = 0{,}1$ korzystamy ze wzoru (38)

$$(t_i)_{max} = \pi \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{0{,}04} \cdot 0{,}1 = 0{,}089 \text{ sek}$$

W przybliżeniu taki sam wynik otrzymamy z wykresu podanego na rys. 8 dla krzywej $P = 10^7\,\Omega$.

Na rys. 10 podano rodzinę charakterystyk obrazującą zależność (37).

Dla małych wartości r, to znaczy gdy $r < 0{,}3$ — jak wynika z rys. 9 — o uchybie ładowania w dużym stopniu decyduje wartość parametru $S = \frac{R}{P}$.

Jeżli we wzorze (34) będzie spełniona zależność $r^2 \ll \pi^2 S$, co przy małych wartościach r może mieć miejsce, wówczas można przyjąć przybliżenie

$$\Delta_l \approx \sin\left[\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{r}{\pi S}\right)\right] - 1 = \sin\left[\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{t_i}{\pi\tau_R}\right)\right] - 1 =$$

$$= \frac{t_i}{\sqrt{t_i^2 + \pi^2 \tau_R^2}} - 1 \tag{39}$$

Ze wzoru (39) otrzymamy

$$\Delta_l + 1 = \frac{t_i}{\sqrt{t_i^2 + \pi^2 \cdot \tau_R^2}} \tag{40}$$

Po przeróbkach wyrażenia (40) wyznaczymy wzór końcowy określający wartość wymaganej maksymalnej stałej czasowej ładowania $(\tau_R)_{max}$ dla minimalego czasu trwania impulsu $(t_i)_{min}$ oraz dla maksymalnego dopuszczalnego uchybu ładowania $(\Delta_l)_{max}$. Otrzymamy wówczas

$$(\tau_R)_{max} \approx \frac{\sqrt{2}}{\pi} (t_i)_{min} \cdot \sqrt{(-\Delta_l)_{max}} \tag{41}$$

skąd

$$(t_i)_{min} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} (\tau_R) \cdot \frac{1}{\sqrt{(-\Delta_l)_{max}}} \tag{42}$$

Jeżeli np. $R = 1000\,\Omega$; $C = 10^{-8}$ F, czyli gdy $\tau_R = 10^{-5}$ sek oraz gdy $(\Delta_l)_{max} = -0{,}04$, wówczas

$$(t_i)_{min} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{\sqrt{0{,}04}} = 1{,}11 \cdot 10^{-4} \text{ sek}$$

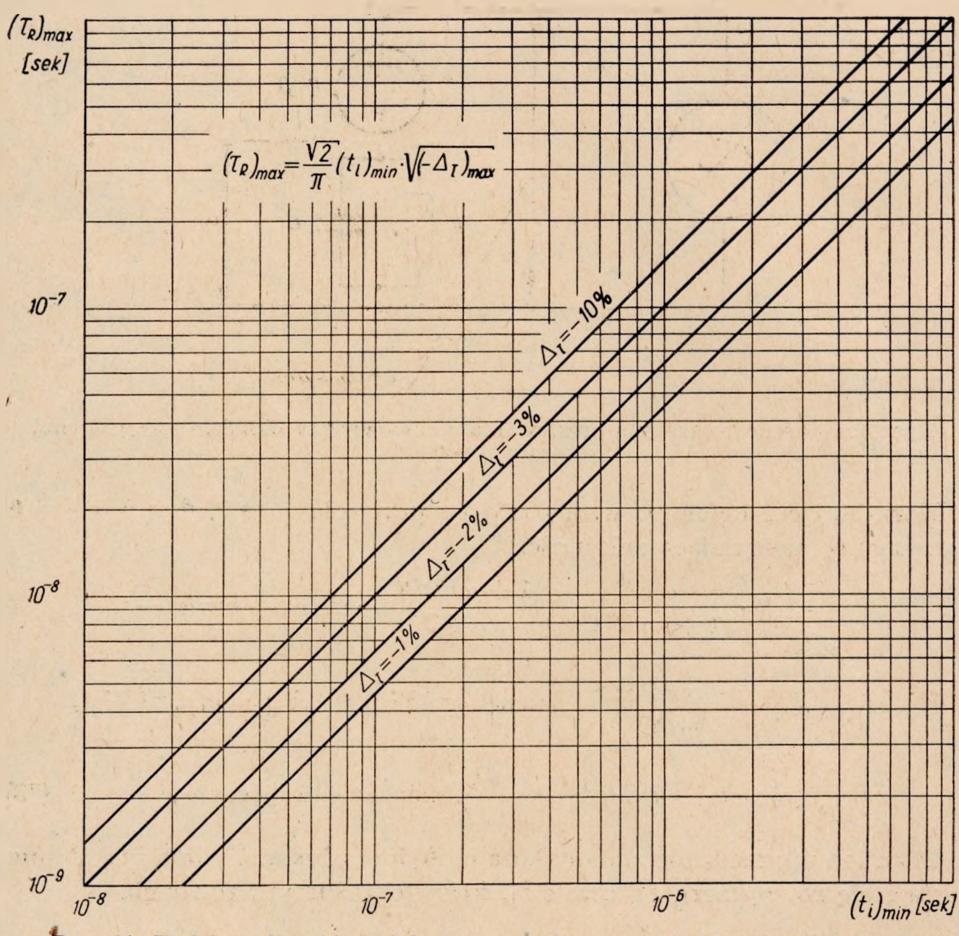
Z wykresu rys. 8 otrzymujemy wartość podobną.

Na rys. 11 podano rodzinę charakterystyk obrazującą zależność (41).

Na zakończenie rozważań, dotyczących uchybu ładowania w miernikach impulsowych, należy zwrócić uwagę na to, że przy projektowaniu elementów takiego miernika ustala się dla danego zakresu czasów trwania $(t_i)_{min}$

i $(t_i)_{max}$ mierzonych impulsów, odpowiednie stałe czasowe $(\tau_R)_{max}$ i $(\tau_P)_{min}$ z wykresów podanych na rys. 10 i rys. 11, przyjmując zgodnie z wymaganiami maksymalny uchyb ładowania $(\Delta_l)_{max}$.

Określone w ten sposób stałe czasowe pozwolą na wyznaczenie elementów P, C dla danej oporności R diody.



Rys. 11. Rodzina charakterystyk $(\tau_R)_{max} = f(t_i)_{min}$ dla różnych wartości Δ_l

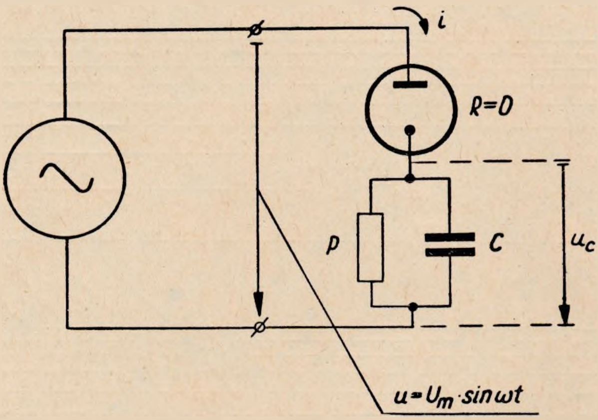
3.1.5. Przypadki szczególne

Obecnie zostaną przedstawione przypadki szczególne pracy impulsowych woltomierzy lampowych opisane w literaturze, a mianowicie przypadek, gdy $R = 0$ (wzory R. Rüdenberga) i przypadek, gdy $P = \infty$ (układ woltomierza lampowo-elektrostatycznego).

Odpowiednie wzory zostaną wyprowadzone jako szczególne przypadki wzorów (18) i (19).

Wzory R. Rüdenberga

Wzory Rüdenberga zostały wyprowadzone w założeniu, że oporność R prostownika w kierunku przepustowym jest równa zeru (prostownik idealny, rys. 12) oraz w przypadku kąta $\vartheta = 0$ i napięcia $U_C = 0$.



Rys. 12. Miernik lampowy o prostowaniu szczytowym w układzie szeregowym, gdy $R = 0$

Korzystając z ogólnego wzoru (18) po przyjęciu $R = 0$, $\vartheta = 0$, $U_C = 0$ otrzymamy następującą zależność:

$$\underset{R \to 0}{i} = \frac{U_m}{R} \cdot \frac{\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \left\{ \frac{1 + \omega^2 RPC^2}{\omega PC} \cdot \sin \omega t + \cos \omega t - \right.$$

$$\left. - \left[\cos 0 + \frac{1 + \omega^2 RPC^2}{\omega PC} \cdot \sin 0 \right] \cdot e^{-t/RC} \right\} + \frac{U_m}{R} [\sin 0] \cdot e^{-t/RC} =$$

$$= \frac{U_m}{P} (\sin \omega t + \omega PC \cdot \cos \omega t) = \frac{U_m}{P} (\sin \omega t + \omega \tau_p \cdot \cos \omega t) \tag{43}$$

Prąd ten w przedziale zmiany kąta od 0 do π uzyskuje jedno maksimum i staje się równy zeru po czasie t_1, który określimy z równania

$$0 = \frac{U_m}{P} \cdot (\sin \omega t_1 + \omega PC \cdot \cos \omega t_1). \tag{44}$$

Z równania tego otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \omega t_1 &= \operatorname{arc\,tg} (- \omega PC) \\ t_1 &= \frac{1}{\omega} \cdot \operatorname{arc\,tg} (- \omega PC) \end{aligned} \right\} \tag{45}$$

[por. wzory (22) i (24)].

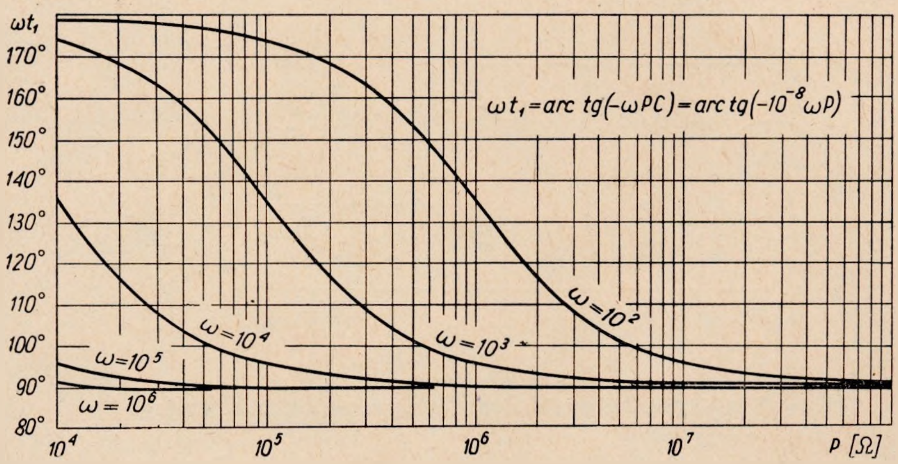
Znaki „minus” we wzorach (45) wykazują, że kąt ωt_1 jest w drugiej ćwiartce (w zakresie od $\pi/2$ do π).

Napięcie u_C kondensatora w okresie przewodzenia jest, zgodnie ze schematem, równe napięciu zasilającemu u. Zależność tę można wyprowadzić ze wzoru (19), przyjmując dla rozpatrywanego przypadku $\vartheta = 0$, $U_C = 0$, $R = 0$:

$$\left.\begin{aligned} u_{CP} &= U_m \cdot \omega\tau_R \left\{ \frac{\sin \omega t}{\omega \tau_R} + \left[\cos 0 + \frac{1 + \omega^2 \tau_R \tau_P}{\omega\tau_P} \cdot \sin 0 \right] \cdot \right. \\ &\left. e^{-t/\tau_R} \right\} = U_m \cdot \sin \omega t. \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

W chwili t_1 napięcie $u_{CP} = U_{C1}$ osiąga wartość

$$U_{C1} = U_m \cdot \sin \omega t_1 = U_m \cdot \sin [\operatorname{arc\,tg} (-\omega PC)] = \frac{\omega PC}{\sqrt{1 + \omega^2 P^2 C^2}} U_m \quad (47)$$



Rys. 13. Wykres zależności kąta ωt_1 w funkcji oporności P dla różnych pulsacji ω, gdy $C = 10^{-8}$ F

Przy wyprowadzaniu zależności (47) korzystano ze wzoru

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

uwzględniając zmianę znaku obowiązującą w drugiej ćwiartce. Wzory (43), (45), (46) i (47) zostały wyprowadzone przez R. Rüdenberga w prosty sposób w oparciu o rozważania pracy schematu uproszczonego, podanego na rys. 12.

Na rys. 13 podano zależność kąta ωt_1 w funkcji P przy różnych wartościach pulsacji ω, gdy $C = 10^{-8}$ F.

Uchyb ładowania w przypadku $R = 0$ zgodnie ze wzorem (47) wyniesie

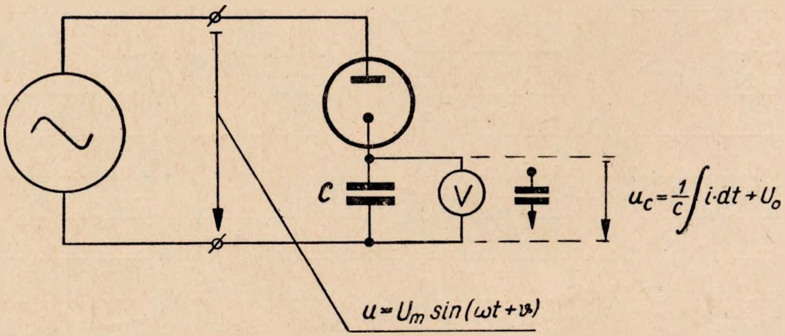
$$\begin{aligned} \Delta_t &= \frac{U_{C1} - U_m}{U_m} = \frac{U_{C1}}{U_m} - 1 = \\ &= \frac{U_m}{\sqrt{1 + \omega^2 P^2 C^2} \cdot U_m} - 1 = \frac{\omega PC}{\sqrt{1 + \omega^2 P^2 C^2}} - 1 \end{aligned} \tag{48}$$

Z porównania wzorów (35) i (48) wynika

$$\Delta_t = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + r^2}} - 1 = \frac{\omega PC}{\sqrt{1 + \omega^2 P^2 C^2}} - 1$$

Układ woltomierza lampowo-elektrostatycznego

Układ woltomierza lampowo-elektrostatycznego przedstawiono na rys. 14. W układzie tym napięcie u_C jest mierzone za pomocą woltomierza elektrostatycznego o oporności $P = \infty$. Pozostałe wartości, a więc ϑ, R, U_0 mogą być dowolne.



Rys. 14. Układ woltomierza lampowo-elektrostatycznego

Korzystając ze wzorów (18) i (19) i w założeniu $P = \infty$ otrzymamy $\tau_p = PC = \infty$, a więc:

$$\begin{aligned} i = \frac{U_m}{R} \cdot \frac{\omega\tau_R}{1 + \omega^2 \tau_R^2} &\left\{ \omega\tau_R \cdot \sin(\omega t + \vartheta) + \cos(\omega t + \vartheta) - \right. \\ &\left. - [\cos\vartheta + \omega\tau_R \sin\vartheta] \cdot e^{-t/\tau_R} \right\} + \left[\frac{U_m}{R} \cdot \sin\vartheta - \frac{U_C}{R} \right] \cdot e^{-t/\tau_R} \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} U_{CP} = U_m \cdot \frac{\omega\tau_R}{1 + \omega^2 \tau_R^2} \cdot &\left\{ \frac{\sin(\omega t + \vartheta)}{\omega\tau_R} - \cos(\omega t + \vartheta) + \right. \\ &\left. + [\cos\vartheta + \omega\tau_R \sin\vartheta] \cdot e^{-t/\tau_R} \right\} - [U_m \cdot \sin\vartheta - U_C] \cdot e^{-t/\tau_R} \end{aligned} \tag{50}$$

Powyższe uproszczone wzory (49) i (50) można przedstawić w innej postaci, wprowadzając kąt fazowy φ uzależniony od oporności rzeczywistej R

i pojemnościowej $\frac{1}{\omega C}$. Mamy bowiem z trójkąta oporności (rys. 15) następujące elementarne zależności:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\frac{1}{\omega C}}{R} = -\frac{1}{\omega RC} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\cos\varphi = -\omega RC\cdot\sin\varphi$$

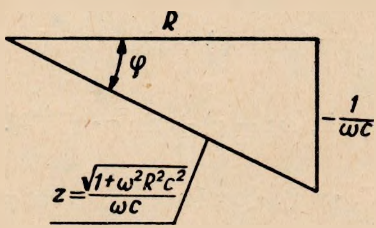
$$\sin\varphi = -\frac{-\frac{1}{\omega C}}{\frac{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}{\omega C}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{1+\omega^2 R^2 C^2}$$

$$\omega\tau_R = \omega RC = -\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\omega^2\tau_R^2 = \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}$$

$$\frac{1}{1+\omega^2\tau_R^2} = \sin^2\varphi$$



Rys. 15. Trójkąt oporności

Podstawiając te zależności do wzoru (49) otrzymamy

$$i = \frac{U_m}{R}\left[\cos\varphi\cdot\sin(\omega t+\vartheta-\varphi)+\sin\varphi\cdot\cos(\vartheta-\varphi)\cdot e^{-t/\tau_R}\right] - \\ -\frac{U_C}{R}\cdot e^{-t/\tau_R} \tag{51}$$

Ze wzoru (51) otrzymamy natomiast

$$u_{CP} = U_m\cdot\sin\varphi\cdot\left[\cos(\omega t+\vartheta-\varphi)-\cos(\vartheta-\varphi)\cdot e^{-t/\tau_R}\right]+U_c\cdot e^{t/\tau_R} \tag{52}$$

Wzory (51) i (52), przy założeniu $U_C = 0$, są powszechnie stosowane w literaturze technicznej opisującej przebiegi nieustalone. Są one wyprowadzone po przyjęciu prostego zestawu elementów R, C w układzie szeregowym.

Zgodność wyników uzyskanych ze wzoru ogólnego (18) lub (19), po dokonaniu założeń upraszczających oraz wyników uzyskanych przy rozważaniu przypadków szczególnych, świadczy o prawidłowości wzorów ogólnych (18) i (19) podanych przez autora niniejszej pracy. Podany przypadek szczególny pracy woltomierza lampowo-elektrostatycznego, gdy $P = \infty$, nadaje się do bardziej wnikliwej analizy warunków pracy w zależności od kąta ϑ.

Dla rozładowanego kondensatora, gdy $U_C = 0$, otrzymamy ze wzorów (51) i (52) następujące zależności:

$$i = \frac{U_m}{R} \left[\cos\varphi \cdot \sin(\omega t + \vartheta - \varphi) + \sin\varphi \cdot \cos(\vartheta - \varphi) \cdot e^{-t/\tau_R}\right] \tag{53}$$

$$u_{CP} = U_m \cdot \sin\varphi \cdot \left[\cos(\omega t + \vartheta - \varphi) - \cos(\vartheta - \varphi) \cdot e^{-t/\tau_R}\right] \tag{54}$$

Wyrażenie na napięcie u_C można również wyznaczyć drogą całkowania prądu i

$$u_C = \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt$$

Przedyskutujemy obecnie przypadki szczególne pracy układu w zależności od kąta ϑ. Rozpatrzymy następujące przypadki szczególne:

1) $\vartheta = 0$, wówczas

$$\left.\begin{aligned} i &= \frac{U_m}{R} \cdot \left[\cos\varphi \cdot \sin(\omega t - \varphi) + \sin\varphi \cdot \cos(-\varphi) \cdot e^{-t/\tau_R}\right] = \\ &= \frac{U_m}{R} \cdot \cos\varphi \cdot \left[\sin(\omega t - \varphi) + \sin\varphi \cdot e^{-t/\tau_R}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

$$u_{CP} = U_m \cdot \sin\varphi \cdot \left[\cos(\omega t - \varphi) - \cos\varphi \cdot e^{-t/\tau_R}\right] \tag{56}$$

2) $\vartheta = 90°$, wówczas

$$i = \frac{U_m}{R} \left[\cos\varphi \cdot \cos(\omega t - \varphi) + \sin^2\varphi \cdot e^{-t/\tau_R}\right] \tag{57}$$

$$\left.\begin{aligned} u_{CP} &= U_m \cdot \sin\varphi \cdot \left[\cos(\omega t + 90° - \varphi) - \cos(90° - \varphi) \cdot e^{-t/\tau_R}\right] = \\ &= U_m \cdot \sin\varphi \cdot \left[-\sin(\omega t - \varphi) + \sin\varphi \cdot e^{-t/\tau_R}\right] \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

3) $D = D_{max}$, tj. gdy $\vartheta = \varphi$.

Przypadek ten jest charakterystyczny dla ekstremum prądu przejściowego [por. wzór (15)]. Ekstremum to będzie występowało przy kącie ϑ, którego wartość określimy z zależności

$$\frac{d}{d\vartheta}(D) = 0$$

Wyrażenie na D określamy dla przypadku $P = \infty$, $U_C = 0$. Mamy więc z wyrażenia (15) następujący wzór

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{U_m}{R} \cdot \sin\vartheta - \frac{U_m}{1+\omega^2 R^2 C^2}\left[\omega C \cdot \cos\vartheta + R\,\omega^2 C^2 \cdot \sin\vartheta\right] = \\ &= \frac{U_m}{R}\left[\sin\vartheta + \cos\varphi\,(\cos\vartheta \cdot \sin\varphi - \sin\vartheta \cdot \cos\varphi)\right] \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Pochodna wyrażenia (59) dla D_{max} wynosi

$$\frac{d}{d\vartheta}(D) = \frac{U_m}{R}\sin\varphi \cdot \sin(\varphi - \vartheta) = 0 \tag{60}$$

Rozwiązanie $\sin\varphi = 0$, tj. gdy $\varphi = 0$ nie ma zastosowania fizycznego, natomiast rozwiązanie $\sin(\varphi - \vartheta) = 0$, czyli gdy $\varphi = \vartheta$ jest realne. Wówczas prąd przejściowy będzie miał wartość ekstremalną, czemu odpowiada

$$D_{max} = \frac{U_m}{R} \cdot \sin\varphi \tag{61}$$

W omawianym przypadku zgodnie z wyrażeniem (61) otrzymamy

$$i = \frac{U_m}{R}\left[\cos\varphi \cdot \sin\omega t + \sin\varphi \cdot e^{-t/\tau_R}\right] \tag{62}$$

zgodnie zaś z wyrażeniem (52)

$$u_C = U_m \cdot \sin\varphi \cdot \left[\cos\omega t - e^{-t/\tau_R}\right] \tag{63}$$

W tym przypadku napięcie u_C będzie najbardziej odbiegało od funkcji sinusoidalnej.

4) $D = 0$, tj. gdy $\vartheta = \pm 90° + \varphi$.

W tym przypadku prąd przejściowy jest równy zeru, [por. wzór (11)].

Gdy $D = 0$, obowiązuje zależność

$$D = \frac{U_m}{R}\left[\sin\vartheta + \cos\varphi\,(\cos\vartheta \cdot \sin\varphi - \sin\vartheta \cdot \cos\varphi)\right] = 0 \tag{64}$$

[por. wzór (49)].

Należy więc spełnić równanie

$$\sin\vartheta + \cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \cos\vartheta - \cos^2\varphi \cdot \sin\vartheta = 0 \tag{65}$$

lub

$$\sin\varphi \cdot \cos(\vartheta - \varphi) = 0 \tag{66}$$

Gdy $\sin\varphi = 0$, czyli $\varphi = 0$, to nie ma odpowiednika praktycznego tego rozwiązania.

Gdy natomiast

$$\cos(\vartheta - \varphi) = 0, \qquad \text{to} \qquad \vartheta - \varphi = \pm 90°$$

a więc

$$\vartheta = \pm 90° + \varphi. \tag{67}$$

Przypadek ten jest możliwy w praktyce.

Wówczas prąd zgodnie z wyrażeniem (43) wynosi

$$i = \frac{U_m}{R}\left[\cos\varphi \cdot \sin(\omega t \pm 90^\circ) + \sin\varphi \cdot \cos(\pm 90^\circ) \cdot e^{-t/\tau_R}\right] =$$

$$= \frac{U_m}{R} \cdot \cos\varphi \cdot \cos\omega t \qquad (68)$$

i przebiega wg cosinusoidy, nie zawierając składowej wykładniczej.

W chwili zerowej

$$i(0) = \frac{U_m}{R} \cdot \cos\varphi$$

Napięcie na kondensatorze zgodnie z wyrażeniem (54) przebiega w tym przypadku wg sinusoidy

$$u_{CP} = U_m \cdot \sin\varphi \cdot [\cos(\omega t \pm 90^\circ) - \cos(\pm 90^\circ) \cdot e^{-t/\tau_R}] = U_m \cdot \sin\varphi \cdot \sin\omega t \qquad (69)$$

W rozwiązaniu (69) nie uwzględnia się ujemnej wartości napięcia u_C jako niemożliwej ze względu na zastosowanie prostownika.

Przebiegi odpowiadające kątowi $\vartheta \neq 0$ mają miejsce w praktyce pomiarowej wtedy, gdy woltomierz impulsowy jest włączony do obwodu pomiarowego w czasie działania impulsu. Nie jest to więc przypadek charakterystyczny z punktu widzenia pomiarowego, gdyż w czasie wykonywania pomiaru napięć impulsowych woltomierz powinien być włączony do obwodu pomiarowego przed działaniem impulsu. Wówczas można liczyć czas od chwili początku narastania napięcia impulsowego i można przyjąć, że istnieje przypadek $\vartheta = 0$.

Na zakończenie tych rozważań należy zwrócić uwagę na możliwości występowania przetężeń w chwili włączania woltomierza, gdy $\vartheta \neq 0$. Wynika to ze wzoru (43), gdy przyjąć czas $t = 0$. Mamy wówczas:

$$i(0) = \frac{U_m}{R}[\cos\varphi \cdot \sin(\vartheta - \varphi) + \sin\varphi \cdot \cos(\vartheta - \varphi)] = \frac{U_m}{R} \cdot \sin\vartheta \qquad (70)$$

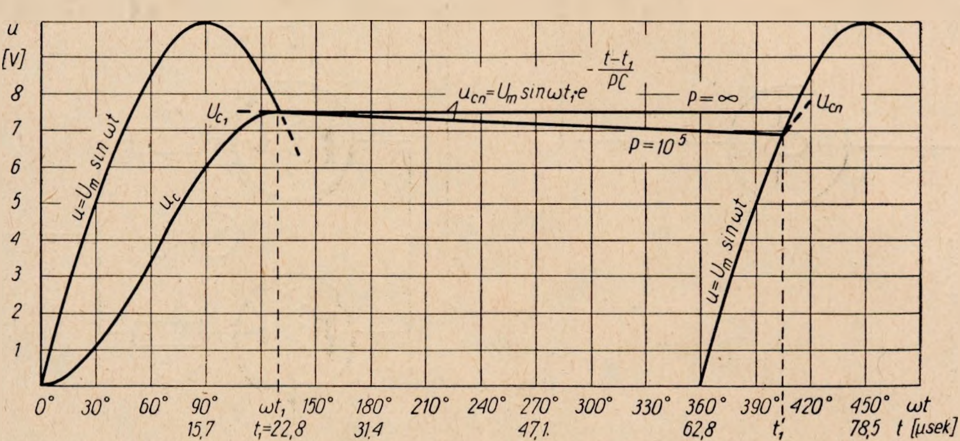
Przy dużym napięciu U_m oraz przy małej oporności R może popłynąć w obwodzie znaczny prąd w chwili $t = 0$ zwłaszcza, gdy $\vartheta = 90^\circ$. To przetężenie spowoduje chwilowe przepięcie występujące na lampie o oporności R, z czym należy liczyć się przy wyborze lampy. Największe napięcie na lampie będzie się pojawiało w przypadku, gdy $\vartheta = 90^\circ$, wówczas:

$$i \cdot R = U_m \qquad (71)$$

3.2. Zakres nieprzewodzenia diody

Zakres nieprzewodzenia diody rozpoczyna się od chwili t_1, określonej wzorem (23) lub wzorem (45), a kończy się w chwili t_1', w której druga dodatnia półfala napięcia osiągnie wartość chwilową równą wartości chwilowej napięcia występującego w tym momencie na kondensatorze. Wówczas chwilowe napięcie na lampie staje się równe zeru.

Jeżeli impuls jest pojedynczy, wówczas zakres nieprzewodzenia diody rozpoczyna się od chwili t_1 do ∞. W zakresie nieprzewodzenia kondensator C, naładowany w chwili t_1 do napięcia $U_{C1} = U_m \cdot \sin \omega t_1$, rozładowywuje się prądem i_p przez oporność P. Wskutek tego napięcie na kondensatorze C maleje wg krzywej wykładniczej.



Rys. 16. Wykres ilustrujący wyznaczanie czasu t_1'

Prąd rozładowania i_P wynosi więc:

$$i_P = \frac{U_{C1}}{R} \cdot e^{-\frac{t-t_1}{PC}} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t_1 \cdot e^{-\frac{t-t_1}{PC}} \tag{72}$$

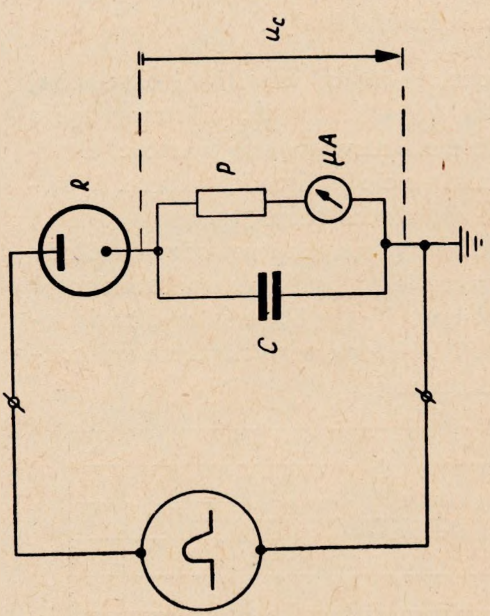
zaś napięcie u_{Cn} na kondensatorze C lub oporniku P

$$u_{Cn} = i_P \cdot R = U_m \cdot \sin \omega t_1 \cdot e^{-\frac{t-t_1}{PC}} \tag{73}$$

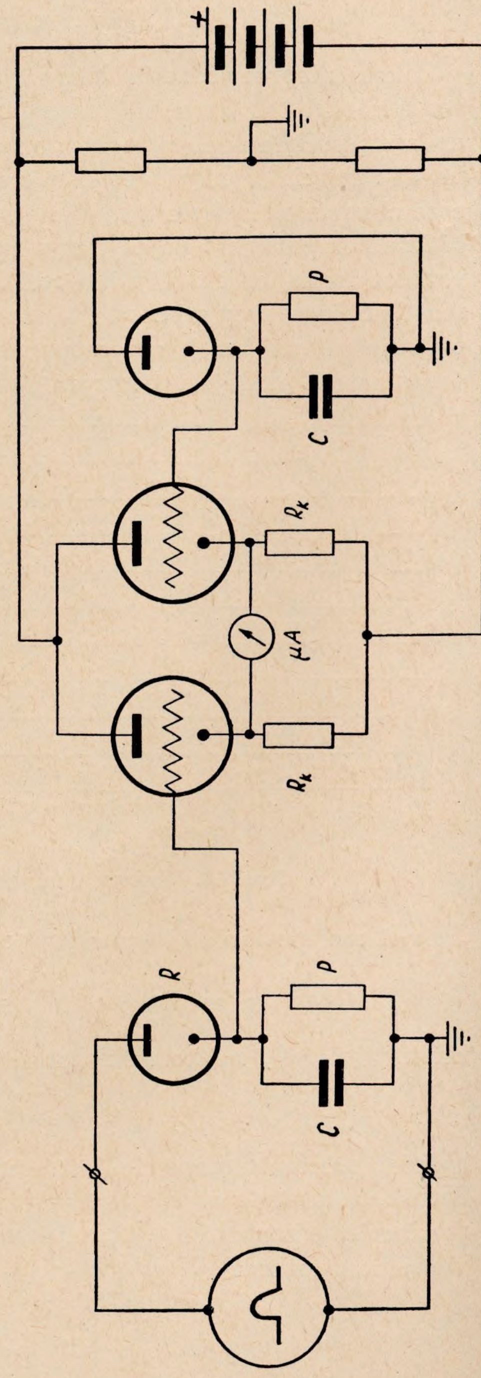
Jeżeli mierzone napięcie jest sinusoidalnie zmienne, to w drugim dodatnim półokresie w chwili $t = t_1'$ nastąpi zrównanie napięcia u_C z napięciem mierzonym $u = U_m \cdot \sin \omega t$ (zakładamy kąt $\vartheta = 0$). Napiszemy wówczas zależność

$$U_m \cdot \sin \omega t_1' = U_m \cdot \sin \omega t_1 \cdot e^{-\frac{t_1'-t_1}{PC}} \tag{74}$$

Z równania (74) należy wyznaczyć czas t_1', jednakże rozwiązanie powyższego równania nie jest możliwe przez dokonanie skończonej liczby dzia-



Rys. 17. Miernik lampowy o prostowaniu szczytowym, w którym zastosowano woltomierz magnetoelektryczny



Rys. 18. Miernik lampowy o prostowaniu szczytowym, w którym zastosowano woltomierz lampowy wtórnikowy

łań, dlatego musi być wykonana wykreślnie. Rysujemy w tym celu daną krzywą wykładniczą (wzór 73) i krzywą $u = U_m \cdot \sin \omega t$. Miejsce przecięcia tych krzywych odpowiada chwili t_1'. Postępowanie to przedstawiono na rys. 16 dla napięcia $U_m = 10$ V, $C = 10^{-8}$ F, $P = 10^5$; $\infty\,\Omega$. Dla chwili t_1 przyjęto napięcie U_{C1} powstałe wskutek ładowania prądem poprzedniego impulsu sinusoidalnego o pulsacji $\omega = 10^5$, gdy $R = 10^3\,\Omega$.

Przebieg napięcia u_C w zakresie przewodzenia diody i w zakresie nieprzewodzenia stanowi impuls wymuszający, w zależności od którego kształtują się przebiegi nieustalone wskazań miernika magnetoelektrycznego, który w najprostszym przypadku może być woltomierzem magnetoelektrycznym, zbudowanym z mikroamperomierza μA i opornika P, jak to przedstawiono na rys. 17, lub woltomierzem lampowym wtórnikowym, jak na rys. 18.

4. MECHANICZNE PRZEBIEGI NIEUSTALONE WSKAZAŃ

Napięcie wymuszające u_C, wywołane pojedynczym impulsem sinusoidalnym, składa się z dwóch części: napięcia u_{CP} narastającego według ogólnej zależności (19) w zakresie przewodzenia diody oraz napięcia u_{Cn} malejącego według zależności (75) w zakresie nieprzewodzenia diody. Zakres przewodzenia diody liczony jest od chwili 0 do t_1, zakres nieprzewodzenia zaś przy pracy jednoimpulsowej od chwili t_1 do ∞.

Zajmiemy się najpierw określeniem odchylenia kątowego $\alpha = f(t)$ pod wpływem działania napięcia u_{CP}. Zakładamy przy tym, że $\vartheta = 0$, gdyż przyrząd impulsowy musi być stale dołączony do źródła, a więc liczenie czasu może być przyjęte od chwili pojawienia się początku impulsu. Zgodnie z wyrażeniem (19) prąd i_{CP}, płynący przez przyrząd magnetoelektryczny w czasie przewodzenia diody, posiada wartość:

$$i_{CP} = \frac{u_{CP}}{P} = \frac{U_m \cdot \omega\tau_R}{P(1+\omega^2\tau_R^2)} \cdot \left\{ \frac{\sin\omega t}{\omega\tau_R} - \cos\omega t + e^{-t/\tau_R} \right\}$$

Przebieg nieustalony wskazania w przedziale czasu od 0 do t_1 może być określony z równowagi dynamicznej momentów napędowego, zwrotnego, hamującego i momentu ilości ruchu

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} + k_h \cdot \frac{d\alpha}{dt} + k_z\alpha = k_n \cdot i_{CP} = k_n \frac{U_m \cdot \omega\tau_R}{P(1+\omega^2\tau_R^2)} \left\{ \frac{\sin\omega t}{\omega\tau_R} - \right.$$

$$\left. - \cos\omega t + e^{-t/\tau_R} \right\} \tag{75}$$

W wyrażeniu (75) przez k_h, k_z, k_n oznaczono współczynniki związane z odpowiednimi momentami działającymi na układ ruchomy miernika magnetoelektrycznego:

moment napędowy $M_n = k_n \cdot i = k_n \cdot \frac{u_C}{P}$

moment zwrotny $M_z = k_z \cdot \alpha$

moment hamujący (pomijamy opory tarcia w łożyskach)

$$M_h = k_h \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

moment ilości ruchu $J \frac{d^2\alpha}{dt^2}$, gdzie $J = mr^2$ — moment bezwładności.

Przez α oznaczono odchylenie kątowe układu ruchomego, które jest sumą wahań swobodnych α_s i wskazania wymuszonego α_w

$$\alpha = \alpha_s + \alpha_w$$

Korzystając z tego, że wskazanie nieustalone α jest superpozycją wahań swobodnych (przejściowych) α_s i składowych wskazań wymuszonych, obliczamy kolejno te składowe.

Wahania swobodne α_s określimy jako rozwiązanie ogólne równania różniczkowego (75), które przedstawimy w postaci:

$$\frac{d^2\alpha_s}{dt^2} + \frac{k_h}{J}\frac{d\alpha_s}{dt} + \frac{k_z}{J}\alpha_s = 0$$

Rozwiązaniem tego równania jest:

$$\alpha_s = e^{-s\omega_0 t} \cdot [A \cdot e^{j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot t} + B \cdot e^{-j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot t}] \tag{76}$$

Wskazanie wymuszone składową sinusoidalną, zgodnie z wyrażeniem (75), określimy z zależności

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} + k_h \cdot \frac{d\alpha}{dt} + k_z\alpha = k_n \cdot \frac{U_m}{P(1+\omega^2\tau_R^2)} \cdot \sin\omega t = M_{n\,max} \cdot \sin\omega t \tag{77}$$

Zgodnie z wyrażeniem (77) wskazanie wymuszone będzie się zmieniać sinusoidalnie

$$\alpha = \alpha_{max} \cdot \sin(\omega t + \psi) \tag{78}$$

gdzie kąt ψ wyraża opóźnienie odchylenia względem zmiany napięcia.

Zgodnie z rachunkiem symbolicznym napiszemy

$$\dot{\alpha} = \alpha_{max} \cdot e^{j(\omega t - \psi)} \tag{79}$$

a więc

$$\frac{d\dot{\alpha}}{dt} = j\omega\alpha_{max} \cdot e^{j(\omega t - \psi)} = j\omega \cdot \dot{\alpha}, \tag{80}$$

$$\frac{d^2\dot{\alpha}}{dt^2} = j\omega \cdot j\omega\alpha_{max} \cdot e^{j(\omega t - \psi)} = -\omega^2\dot{\alpha} \tag{81}$$

Podstawiając otrzymane zależności (79), (80), (81) od równania różniczkowego (77) otrzymamy

$$-J\,\omega^2\,\dot{\alpha} + j\,\omega\,k_h\cdot\dot{\alpha} + k_z\cdot\dot{\alpha} = M_{n\,max}\cdot e^{j\,\omega\,t} = \dot{M}_n\,, \tag{82}$$

a więc

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{M}_n}{k_z - J\,\omega^2 + j\,\omega\,k_h} = \frac{\dot{M}_n\cdot(k_z - J\,\omega^2 - j\,\omega\,k_h)}{(k_z - J\,\omega^2)^2 + (\omega\,k_h)^2} \tag{83}$$

Amplituda wahań

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{max} &= \frac{M_{n\,max}\cdot\sqrt{(k_z - J\,\omega^2)^2 + \omega^2\,k_h^2}}{(k_z - J\,\omega^2)^2 + \omega^2\,k_h^2} = \frac{M_{n\,max}}{\sqrt{(k_z - J\,\omega^2)^2 + \omega^2\,k_h^2}} = \\
&= \frac{M_{n\,max}}{k_z}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{J}{k_z}\,\omega^2\right)^2 + \frac{k_h^2}{k_z^2}\,\omega^2}} = \\
&= \frac{M_{n\,max}}{k_z}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 - \left(2s\,\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \\
&= \frac{k_n\cdot U_m}{k_z P\cdot(1+\omega^2\,\tau_R^2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2s\,\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \\
&= \frac{k_n\,U_m}{k_z\,P\,(1 + \omega^2\,\tau_R^2)}\cdot K
\end{aligned}\right| \tag{84}$$

gdzie

$$K = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2s\,\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Kąt przesunięcia fazowego zgodnie z wyrażeniem (83) wynosi

$$\psi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega\,k_h}{k_z - J\,\omega^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega\,\frac{k_h}{k_z}}{1 - \frac{J\,\omega^2}{k_z}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{2s\,\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \tag{85}$$

Równaniem szczególnym, określającym pierwszą składową wahań wymuszonych, jest więc

$$\alpha_1 = \alpha_{max}\cdot\sin(\omega\,t - \psi) = \frac{k_n\cdot U_m}{k_z\cdot P(1+\omega^2\,\tau_R^2)}\cdot K\cdot\sin\left[\omega\,t - \operatorname{arc\,tg}\frac{2s\,\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right] \tag{86}$$

Wskazanie α_1 przebiega więc zgodnie z częstotliwością prądu.

Podobnie, z wyrażenia (75) określimy wskazanie α_2 wymuszone składową cosinusoidalną:

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2}+k_h\cdot\frac{d\alpha}{dt}+k_z\alpha=-k_n\cdot\frac{U_m\cdot\omega\tau_R}{P(1+\omega^2\tau_R^2)}\cdot\cos\omega t \tag{87}$$

a więc

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2}+k_h\cdot\frac{d\alpha}{dt}+k_z\alpha=-k_n\cdot\frac{U_m\omega\tau_R}{P(1+\omega^2\tau_R^2)}\cdot\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

Korzystając z rozwiązania (86) otrzymamy

$$\left.\begin{aligned}\alpha_2&=-\frac{k_n\cdot U_m\cdot\omega\tau_R}{k_zP(1+\omega^2\tau_R^2)}\cdot K\cdot\sin\left[\omega t+\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{2s\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right]=\\&=-\frac{k_n\cdot U_m\omega\tau_R}{k_zP\cdot(1+\omega^2\tau_R^2)}\cdot K\cdot\cos\left[\omega t-\operatorname{arc\,tg}\frac{2s\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right]\end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Wskazanie α_3 wymuszone składową wykładniczą, zgodnie z wyrażeniem (75) określimy ze wzoru

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2}+k_h\cdot\frac{d\alpha}{dt}+k_z\alpha=\frac{k_n\cdot U_m\cdot\omega\tau_R}{P(1+\omega^2\tau_R^2)}\cdot e^{-t/\tau_R} \tag{89}$$

Zakładamy

$$\alpha=a\cdot e^{-t/\tau_R}$$

więc

$$\frac{d\alpha}{dt}=-\frac{a}{\tau_R}\cdot e^{-t/\tau_R}$$

oraz

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}=\frac{a}{\tau_R^2}\cdot e^{-t/\tau_R}$$

Zgodnie z wyrażeniem (89) otrzymamy więc

$$e^{-t/\tau_R}\cdot\left[J\frac{a}{\tau_R^2}-k_h\cdot\frac{a}{\tau_R}+k_z\cdot a-\frac{k_n\cdot U_m\cdot\omega\tau_R}{P(1+\omega^2\tau_R^2)}\right]=0$$

stąd

$$a=\frac{k_n\cdot U_m\cdot\omega\tau_R^3}{P(1+\omega^2\tau_R^2)\cdot(J-k_h\cdot\tau_R+k_z\tau_R^2)}$$

Ostatecznie

$$\alpha_3=a\cdot e^{-t/\tau_R}=\frac{k_n\cdot U_m\cdot\omega\tau_R^3}{P(1+\omega^2\tau_R^2)\cdot(J-k_h\cdot\tau_R+k_z\tau_R^2)}\cdot e^{-t/\tau_R} \tag{90}$$

Wskazanie łączne

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_s + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = e^{-s\omega_0 t} \cdot [A \cdot e^{j\omega_0 \sqrt{1-s^2}\, t} + B \cdot e^{-j\omega_0 \sqrt{1-s^2}\, t}] + \\
&+ \frac{k_n \cdot U_m}{k_z P (1 + \omega^2 \tau_R^2)} \cdot K \cdot \sin \left[\omega t - \operatorname{arc\,tg} \frac{2s \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right] - \\
&- \frac{k_n \cdot U_m \cdot \omega \tau_R}{k_z P (1 + \omega^2 \tau_R^2)} \cdot K \cdot \cos \left[\omega t - \operatorname{arc\,tg} \frac{2s \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right] + \\
&+ \frac{k_n \cdot U_m \cdot \omega \tau_R^3}{P (1 + \omega^2 \tau_R^2) \cdot (J - k_h \cdot \tau_R + k_z \cdot \tau_R^2)} \cdot e^{-t/\tau_R}
\end{aligned}\right\} \quad (91)$$

Ponieważ w praktyce pulsacja ω prądu jest znacznie większa od pulsacji ω_0 swobodnych wahań układu ruchomego miernika, więc

$$K = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2s \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

oraz

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{2s \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \operatorname{arc\,tg} 2s \frac{\omega_0}{\omega} \approx 0$$

Dlatego wskazanie łączne da się w przybliżeniu określić wzorem

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &\approx e^{-s\omega_0 t} [A \cdot e^{j\omega_0 \sqrt{1-s^2} \cdot t} + B \cdot e^{-j\omega_0 \sqrt{1-s^2} \cdot t}] + \\
&+ \frac{k_n U_m \omega_0^2}{k_z P (1 + \omega^2 \tau_R^2) \omega^2} \cdot \sin \omega t - \frac{k_n \cdot U_m \cdot \tau_R \omega_0^2}{k_z P (1 + \omega^2 \tau_R^2) \omega} \cdot \cos \omega t + \\
&+ \frac{k_n U_m \omega \tau_R^3}{P (1 + \omega^2 \tau_R^2)(J - k_h \tau_R + k_z \tau_R^2)} \cdot e^{-t/\tau_R}
\end{aligned}\right\} \quad (92)$$

Ponieważ w praktyce

$$U_m \approx U_{C1}$$

a ponadto

$$\frac{k_n U_{C1}}{k_z P} = \alpha_u$$

gdzie α_u jest wskazaniem ustalonym, do którego zdąża wskazówka miernika impulsowego wskutek wymuszenia powodowanego napięciem U_{C1}

oraz ponieważ w praktyce

$$J - k_h \cdot \tau_R + k_z \tau_R^2 \approx J = \frac{k_z}{\omega_0^2},$$

więc

$$\left.\begin{aligned}
\alpha \approx & \, e^{-s\omega_0 t} \cdot \left[A \cdot e^{+j\omega_0 \sqrt{1-s^2} \cdot t} + B \cdot e^{-j\omega_0 \sqrt{1-s^2} \cdot t}\right] + \\
& + \alpha_u \cdot \frac{1}{1+\omega^2 \tau_R^2} \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cdot \sin \omega t - \alpha_u \cdot \frac{\tau_R}{1+\omega^2 \tau_R^2} \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega} \cdot \cos \omega t + \\
& + \alpha_u \cdot \frac{\tau_R^3}{1+\omega^2 \tau_R^2} \cdot \omega \cdot \omega_0^2 \cdot e^{-t/\tau_R} = e^{-s\omega_0 t} \cdot [A \cdot e^{j\omega_0 \sqrt{1-s^2} \cdot t} + \\
& + B \cdot e^{-j\omega_0 \sqrt{1-s^2} \cdot t}] + \alpha_u \cdot \frac{1}{1+\omega^2 \tau_R^2} \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cdot [\sin \omega t - \\
& - \omega \tau_R \cdot \cos \omega t + \omega^3 \tau_R^3 \cdot e^{-t/\tau_R}]
\end{aligned}\right\} \quad (93)$$

Stałe A i B wyznaczamy z warunków początkowych, zakładając $t = 0$ i określając

$$\alpha_0 = 0; \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t=0} = 0$$

Po podstawieniu do wzoru (93) wyrażeń określających stałe A i B i po dokonaniu przekształceń otrzymamy wzór określający wskazanie nieustalone α

$$\left.\begin{aligned}
\alpha = & \, \alpha_u \cdot e^{-s\omega_0 t} \cdot \frac{1-\omega^2 \tau_R^2}{1+\omega^2 \tau_R^2} \cdot \frac{\omega_0}{2\omega} \left[\left(\omega_0 \tau_R - \frac{1}{j\sqrt{1-s^2}}\right) \cdot \right. \\
& \left. \cdot e^{j\omega_0 \sqrt{1-s^2}\, t} + \left(\omega_0 \tau_R + \frac{1}{j\sqrt{1-s^2}}\right) \cdot e^{-j\omega_0 \sqrt{1-s^2} \cdot t}\right] + \\
& + \alpha_u \cdot \frac{1}{1+\omega^2 \tau_R^2} \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cdot [\sin \omega t - \omega_0 \tau_R \cos \omega t + \\
& + \omega^3 \tau_R^3 \cdot e^{-t/\tau_R}]
\end{aligned}\right\} \quad (94)$$

Po przekształceniach wyrażenia (94) otrzymamy

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\alpha_u} = & \frac{1}{1+\omega^2 \tau_R^2} \cdot \frac{\omega_0}{\omega} \left[(\omega^2 \tau_R^2 - 1) \cdot e^{-s\omega_0 t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \cdot \sin(\omega_0 \sqrt{1-s^2} \cdot t) + \right. \\
& \left. + (\sin \omega t - \omega \tau_R \cos \omega t + \omega^3 \tau_R^3 \cdot e^{-t/\tau_R}) \frac{\omega_0}{\omega}\right] \qquad (95)
\end{aligned}$$

Wyrażenie to obowiązuje w przedziale czasu $0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Jeżeli jednak przyjąć, że czas $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$, tj. że kondensator naładował się do wartości maksymalnej w chwili odpowiadającej czwartej części okresu zmiany napięcia, to wówczas będziemy uważać, że wyrażenie (95) obowiązuje w przedziale czasu $0 \leqslant t \leqslant \frac{T}{4}$, czyli w przedziale $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2\omega}$.

Po podstawieniu do wyrażenia (95) wartości $s = 0{,}8$; $\frac{\omega_0}{\omega} = 0{,}1 \ldots 0{,}001$; $\tau_R = 10^{-5}$ otrzymuje się w granicach czasu $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2\omega}$ wartości $\frac{\alpha}{\alpha_u}$ mniejsze od 0,01. Wynika stąd wniosek, że po czasie $t = \frac{\pi}{2\omega}$ odchylenie α jest pomijalnie małe w porównaniu do odchylenia końcowego α_u. Można więc uważać, że dostrzegalne odchylenie pojawia się po czasie $t = \frac{\pi}{2\omega}$, a więc w czasie nieprzewodzenia diody.

Prędkość kątowa układu ruchomego miernika może być ustalona z równania (75) równowagi dynamicznej momentów

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} + k_h \cdot \frac{d\alpha}{dt} + k_z \alpha = k_n \cdot i_{CP}$$

Ponieważ

$\sqrt{\frac{k_z}{J}} = \omega_0$ .... pulsacja rezonansowa wahań mechanicznych,

$\frac{k_h}{2\sqrt{J k_z}} \doteq s$ ..... współczynnik ustalania,

$\frac{\alpha}{i} = C_i = \frac{k_n}{k_z}$ .. czułość prądowa miernika,

więc

$$\frac{k_h}{J} = \frac{2s\sqrt{J k_z}}{J} = 2s\sqrt{\frac{k_z}{J}} = 2s\,\omega_0$$

$$\frac{k_n}{J} = \frac{C_i k_z}{J} = C_i \cdot \omega_0^2$$

oraz

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2s\,\omega_0 \frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2 \alpha = C_i \cdot \omega_0^2 \cdot i_{CP} \tag{96}$$

Po czasie $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ prąd i_{CP} spowoduje odchylenie $\alpha \geq 0$, jak to wynika z obliczenia ze wzoru (95) przy przyjęciu odpowiednich wartości. Dlatego do chwili $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ możemy uważać, że obowiązuje wyrażenie (96) w postaci przybliżonej

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2s\,\omega_0 \cdot \frac{d\alpha}{dt} \approx C_i \cdot \omega_0^2 \cdot i_{CP} \tag{97}$$

Całkując to wyrażenie za okres od 0 do $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ otrzymamy

$$\frac{d\alpha}{dt} + 2s\,\omega_0\,\alpha \approx C_i \cdot \omega_0^2 \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2\omega}} i_{CP} \cdot dt \tag{98}$$

Ponieważ jednak przyjęliśmy, że po czasie $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ odchylenie $\alpha \approx 0$, więc

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t_1=\frac{\pi}{2\omega}} \approx C_i \cdot \omega_0^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2\omega}} i_{CP}\, dt = C_i \omega_0^2 \cdot Q, \tag{99}$$

gdzie

$$Q = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2\omega}} i_{CP} \cdot dt$$

jest ilością elektryczności, jaka jest w impulsie wskutek przepływu prądu i_{CP}, w czasie od 0 do $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$.

Prędkość kątowa układu ruchomego $\frac{d\alpha}{dt}$ w czasie $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ jest, jak to wynika z wyrażenia (99), proporcjonalna do ładunku Q impulsu prądu.

Korzystając z wyrażenia (19) określającego napięcie u_{CP} wyznaczymy ładunek Q

$$Q = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2\omega}} i_{CP} \cdot dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \frac{u_{CP}}{P} \cdot dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \frac{U_m \cdot \omega \tau_R}{P(1+\omega^2 \tau_R^2)} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\sin \omega t}{\omega \tau_R} - \cos \omega t + e^{-t/\tau_R}\right) \cdot dt' = \frac{U_m \cdot \omega \tau_R}{P \cdot (1+\omega^2 \tau_R^2)} \cdot$$

$$\cdot \left| \frac{\cos \omega t}{\omega^2 \tau_R} - \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega t - e^{-t/\tau_R} \cdot \tau_R \right|_0^{\frac{\pi}{2\omega}} =$$

$$= \frac{U_m}{\omega P (1 + \omega^2 \tau_R^2)} \approx \frac{U_m}{\omega P}$$

a więc

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t_1=\frac{\pi}{2\omega}} = C_i \cdot \omega_0^2 \cdot \frac{U_m}{P \cdot \omega} = \alpha_u \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega}. \tag{100}$$

Po czasie t_1, który w przybliżeniu przyjmujemy jako $t_1 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4}$, ruch układu jest wymuszony prądem i_P rozładowania kondensatora. Obowiązuje wówczas zależność

$$\left.\begin{aligned} J\frac{d^2\alpha}{dt^2} + k_n\cdot\frac{d\alpha}{dt} + k_z\alpha = k_n\frac{U_m}{P}\cdot\sin\omega t_1\cdot e^{-\frac{t-t_1}{\tau_P}} \approx \\ \approx k_n\cdot\frac{U_m}{P}\cdot e^{-\frac{t-\frac{\pi}{2\omega}}{\tau_P}} = k_n\cdot\frac{U_m}{P}\cdot e^{-\frac{2\omega t-\pi}{2\omega\tau_P}} = k_z\alpha_u. \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

Wahania swobodne (przejściowe), zgodnie z wyrażeniem (76), wynoszą

$$\alpha_s = e^{-s\omega_0 t}[E\cdot e^{j\omega_0\sqrt{1-s^2}t} + F\cdot e^{-j\omega_0\sqrt{1-s^2}t}] \tag{102}$$

Natomiast odchylenie wymuszone wyznaczamy z zależności

$$k_z\alpha_w = k_n\cdot\frac{U_m}{P}\cdot e^{-\frac{2\omega t-\pi}{2\omega\tau_P}} = k_z\alpha_u\cdot e^{-\frac{2\omega t-\pi}{2\omega\tau_P}}, \tag{103}$$

a więc

$$\alpha_w = \alpha_u\cdot e^{-\frac{2\omega t-\pi}{2\omega\tau_P}} = \frac{k_n}{k_z}\cdot\frac{U_m}{P}\cdot e^{-\frac{2\omega t-\pi}{2\omega\tau_P}} \approx \frac{k_n}{k_z}\cdot\frac{U_{C1}}{P}\cdot e^{-\frac{2\omega t-\pi}{2\omega\tau_P}}$$

Stąd łącznie ze (102):

$$\left.\begin{aligned} \alpha = \alpha_s + \alpha_w = e^{-s\omega_0 t}\cdot[E\cdot e^{j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot t} + \\ + F\cdot e^{-j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot t}] + \alpha_u\cdot e^{-\frac{2\omega t-\pi}{2\omega\tau_P}} \end{aligned}\right\} \tag{104}$$

Dla czasu $t = t_1 \approx \frac{\pi}{2\omega}$ mamy w przybliżeniu

$$\alpha = \alpha_s + \alpha_w = e^{-s\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\omega}}\cdot\left[E\cdot e^{j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot\frac{\pi}{2\omega}} + \right.$$

$$\left. + F\cdot e^{-j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot\frac{\pi}{2\omega}}\right] + \alpha_u\cdot e^{-\frac{2\omega\frac{\pi}{2\omega}-\pi}{2\omega\tau_P}} \approx$$

$$\approx e^{-\frac{s\pi}{2}\cdot\frac{\omega_0}{\omega}}\cdot\left[E\cdot e^{j\frac{\pi\sqrt{1-s^2}}{2}\cdot\frac{\omega_0}{\omega}} + F\cdot e^{-j\frac{\pi\sqrt{1-s^2}}{2}\cdot\frac{\omega_0}{\omega}}\right] + \alpha_u \approx 0$$

Stąd

$$E\cdot e^{j\frac{\pi\sqrt{1-s^2}}{2}\cdot\frac{\omega_0}{\omega}} + F\cdot e^{-j\frac{\pi\sqrt{1-s^2}}{2}\cdot\frac{\omega_0}{\omega}} = -\alpha_u \tag{105}$$

Zakładając

$$\frac{\omega_0}{\omega} \ll 1$$

otrzymujemy

$$E + F \approx -\alpha_u \tag{106}$$

Pochodna wahań łącznych na podstawie wzoru (104) wynosi

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= -s\omega_0 \cdot e^{-s\cdot\omega_0 t}\cdot[E\cdot e^{j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot t} + F\cdot e^{-j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot t}] + \\ &+ e^{-s\omega_0\cdot t}\cdot[j\omega_0\sqrt{1-s^2}\,E\cdot e^{j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot t} - j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot \\ &\cdot F\cdot e^{-j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot t}] - \alpha_u\cdot\frac{1}{\tau_p}\cdot e^{-\frac{2\omega t-\pi}{2\omega\tau_p}}\end{aligned}\right\} \tag{107}$$

Wartość tej pochodnej dla chwili $t = t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ wynosi

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t_1=\frac{\pi}{2\omega}} &= -s\omega_0 e^{-s\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\omega}}\cdot\left[E\cdot e^{+j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot\frac{\pi}{2\omega}} + \right. \\ &\left. + F\cdot e^{-j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot\frac{\pi}{2\omega}}\right] + e^{-s\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\omega}}\left[j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot\right. \\ &\left.\cdot E\cdot e^{j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot\frac{\pi}{2\omega}} - j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot F\cdot e^{-j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot\frac{\pi}{2\omega}}\right] - \\ &- \alpha_u\cdot\frac{1}{\tau_p}\cdot e^{-\frac{2\omega\frac{\pi}{2\omega}-\pi}{2\omega\tau_p}}\end{aligned}$$

Mamy więc w przybliżeniu przy wykorzystaniu wzoru (100)

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t_1=\frac{\pi}{2\omega}} \approx -s\omega_0[E+F] + j\omega_0\sqrt{1-s^2}[E-F] - \frac{\alpha_u}{\tau_p} \approx \alpha_u\frac{\omega_0^2}{\omega} \tag{108}$$

Wykorzystując wzór (106) mamy

$$s\omega_0\,\alpha_u + j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot[E-F] - \frac{\alpha_u}{\tau_p} = \alpha_u\cdot\frac{\omega_0^2}{\omega} \tag{109}$$

Stąd

$$\left.\begin{aligned}E-F &= \frac{\alpha_u}{j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot\tau_p} + \frac{\alpha_u\,\omega_0}{j\omega_0\sqrt{1-s^2}}\cdot\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\alpha_u\,s\,\omega_0}{j\omega_0\sqrt{1-s^2}} = \\ &= \alpha_u\frac{1+\frac{\omega_0^2}{\omega}\tau_p - s\omega_0\tau_p}{j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot\tau_p}\end{aligned}\right\} \tag{110}$$

Ze wzorów (106) i (110) otrzymamy:

$$E = -\frac{\alpha_u}{2}\left(1 - \frac{1+\frac{\omega_0^2}{\omega}\tau_p - s\omega_0\tau_p}{j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot\tau_p}\right)$$

$$F = -\frac{\alpha_u}{2}\left(1 + \frac{1+\frac{\omega_0^2}{\omega}\tau_p - s\omega_0\tau_p}{j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot\tau_p}\right)$$

Wyrażenie określające wskazanie nieustalone α zgodnie ze wzorem (104) jest

$$
\left.
\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_w + \alpha_s = \alpha_u \cdot e^{-\frac{2\omega t - \pi}{2\omega \tau_p}} + e^{-s\omega_0 t} \cdot \\
&\cdot \left[-\frac{\alpha_u}{2}\left(1 - \frac{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega}\tau_p - s\,\omega_0\,\tau_p}{j\,\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot\tau_p}\right)\cdot e^{j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot t} - \right. \\
&\left. - \frac{\alpha_u}{2}\left(1 + \frac{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega}\tau_p - s\,\omega_0\,\tau_p}{j\,\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot\tau_p}\right)\cdot e^{-j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot t}\right] = \\
&= \alpha_u \cdot e^{-\frac{2\omega t - \pi}{2\omega \tau_p}} - \alpha_u \cdot e^{-s\omega_0 t} \cdot \\
&\cdot \left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega}\tau_p - s\,\omega_0\,\tau_p}{j\,\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot\tau_p}\right)\cdot e^{j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot t} + \right. \\
&\left. + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega}\tau_p - s\,\omega_0\,\tau_p}{j\,\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot\tau_p}\right)\cdot e^{-j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot t}\right] = \\
&= \alpha_u \cdot e^{-\frac{2\omega t - \pi}{2\omega \tau_p}} - \alpha_u \cdot e^{-s\omega_0 t} \cdot \\
&\cdot \left[- \frac{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega}\tau_p - s\,\omega_0\,\tau_p}{2j\,\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot\tau_p}\left(e^{j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot t} - e^{-j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot t}\right) + \right. \\
&\left. + \left(\frac{1}{2}\, e^{j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot t} + \frac{1}{2}\, e^{-j\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot t}\right)\right] = \\
&= \alpha_u \cdot e^{-\frac{2\omega t - \pi}{2\omega \tau_p}} - \alpha_u \cdot e^{-s\omega_0 t} \cdot \\
&\cdot \left[\frac{s\,\omega_0\,\tau_p - 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega}\tau_p}{\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot\tau_p}\sin(\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot t) + \cos(\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot t)\right] = \\
&= \alpha_u \cdot e^{-\frac{2\omega t - \pi}{2\omega \tau_p}} - \alpha_u \cdot e^{-s\omega_0 t}\cdot D \cdot \sin(\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot t + \varphi) = \\
&= \alpha_u \cdot e^{-\frac{2\omega t - \pi}{2\omega \tau_p}} - \alpha_u \cdot e^{-s\omega_0 t}\cdot D \cdot \\
&\cdot [\sin(\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot t)\cdot\cos\varphi + \cos(\omega_0\sqrt{1-s^2}\cdot t)\cdot\sin\varphi]
\end{aligned}
\right\} \quad (111)
$$

W wyrażeniu (111) zastosowano oznaczenie D, którego wartość określimy z wyrażeń

$$D \cdot \cos\varphi = \frac{s\omega_0 \tau_P - 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega}\tau_P}{\omega_0 \sqrt{1 - s^2} \cdot \tau_P}$$

$$D \cdot \sin\varphi = 1$$

Stąd

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - s^2} \cdot \tau_P}{s\omega_0 \tau_P - 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega}\tau_P}$$

oraz

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{1}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}{\operatorname{tg}\varphi} = \\ &= \frac{\sqrt{\left(s\omega_0 \tau_P - 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega}\tau_P\right)^2 + \omega_0^2 (1 - s^2)\tau_p^2}}{\omega_0 \sqrt{1 - s^2} \cdot \tau_P} \end{aligned}\right\} \tag{112}$$

Ostatecznie napiszemy wyrażenie określające przebieg nieustalony $\alpha(t)$ obowiązujący od chwili $t \geqslant \pi/2\omega$

$$\left.\begin{aligned} \alpha = \alpha_u \cdot e^{-\frac{2\omega t - \pi}{2\omega\tau_P}} - \alpha_u \cdot e^{-s\omega_0 t} \cdot \frac{\sqrt{\left(s\omega_0 \tau_P - 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega}\tau_P\right)^2 + \omega_0^2 (1 - s^2)\tau_p^2}}{\omega_0 \sqrt{1 - s^2} \cdot \tau_P} \cdot \\ \cdot \sin \omega_0 \sqrt{1 - s^2} \cdot t + \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega_0 \tau_P \sqrt{1 - s^2}}{\omega_0 \tau_P s - 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega}\tau_P} \end{aligned}\right\} \tag{113}$$

Obliczamy

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{\left(s\omega_0 \tau_P - 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega}\tau_P\right)^2 + \omega_0^2 (1 - s^2) \cdot \tau_p^2} = \\ &= \sqrt{1 + \omega_0^2 \cdot \tau_p^2 \left(1 - \frac{2s}{\omega_0 \tau_P} - \frac{2s\omega_0}{\omega} + \frac{2}{\omega\tau_P} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)} \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

Ponieważ $\frac{\omega_0}{\omega} \ll 1$ oraz $\tau_P \approx 1 \ldots 10$

$s \approx 0{,}6 \ldots 0{,}8$, więc w przybliżeniu można przyjąć, że

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{\left(s\omega_0 \tau_P - 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega}\tau_P\right)^2 + \omega_0^2 (1 - s^2)\tau_P^2} \approx \\ &\approx \sqrt{1 + \omega_0^2 \tau_P^2 \left(1 - \frac{2s}{\omega_0 \tau_P}\right)} \end{aligned}\right\} \tag{115}$$

Ponadto, z wyrażenia (113) mamy

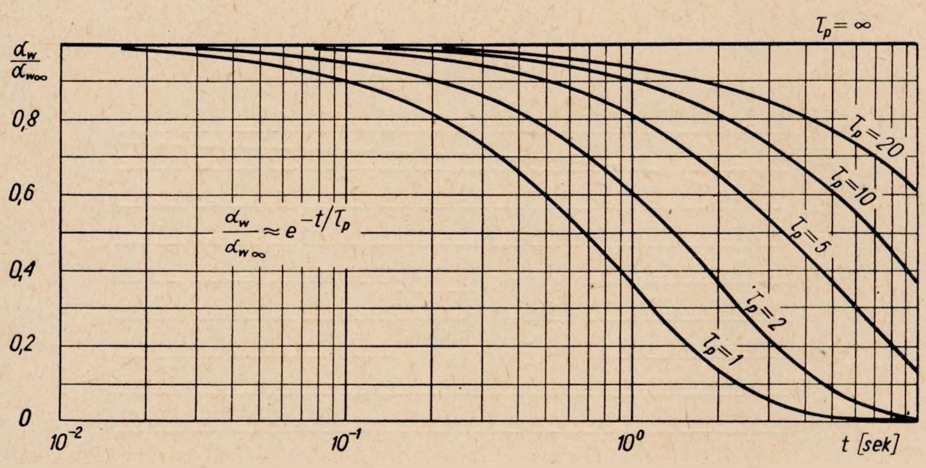
$$\omega_0 \tau_p \cdot s - 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega} \tau_p = \omega_0 \tau_p \left(s - \frac{1}{\omega_0 \tau_p} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \approx \omega_0 \tau_p s \tag{116}$$

Korzystając z wyrażeń (115) i (116) otrzymamy na podstawie wzoru (113)

$$\left. \begin{aligned} \alpha = \alpha_u e^{-\frac{2\omega t - \pi}{2\omega \tau_p}} - \alpha_u \cdot e^{-s \omega_0 t} \frac{\sqrt{1 + \omega_0^2 \tau_p^2 \left(1 - \frac{2s}{\omega_0 \tau_p}\right)}}{\omega_0 \tau_p \sqrt{1 - s^2}} \cdot \\ \cdot \sin\left(\omega_0 \sqrt{1 - s^2} \cdot t + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1 - s^2}{s^2}}\right); \end{aligned} \right\} \tag{117}$$

w szczególnym przypadku, gdy $\tau_p = \infty$

$$\left. \begin{aligned} \alpha = \alpha_u - \alpha_u \cdot e^{-s \omega_0 t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}} \cdot \sin\Big(\omega_0 \sqrt{1 - s^2} \cdot t + \\ + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1 - s^2}{s^2}}\Big) \end{aligned} \right\} \tag{118}$$



Rys. 19. Rodzina charakterystyk $\frac{\alpha_w}{\alpha_{w\infty}}$ w funkcji czasu t dla kilku wartości $\tau_p = PC$

Wzór (118) można wyprowadzić bezpośrednio przyjmując zmianę prądu przepływającego przez miernik zgodnie z funkcją skokową. Z porównania wzorów (117) i (118) wynika, że stała czasowa rozładowania τ_p wpływa na amplitudy obu składowych kąta odchylenia, natomiast nie wpływa na częstotliwość i fazę wahań.

Stosunek kąta odchylenia wymuszonego α_w przy dowolnej stałej czasowej τ_P do kąta odchylenia wymuszonego przy stałej czasowej $\tau_P = \infty$ wynosi

$$\frac{\alpha_{w'}}{\alpha_{w'\infty}} = \frac{e^{-\frac{2\omega t - \pi}{2\omega \tau_p}}}{1} = e^{-\frac{2\omega t - \pi}{2\omega \tau_p}}$$

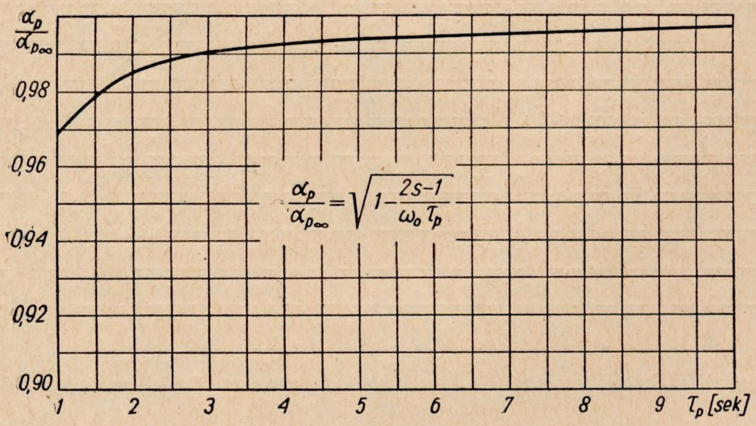
W granicach odpowiednio długiego czasu, przy którym dokonywany jest odczyt mierzonej wartości, mamy $2\omega t \gg \pi$ i dlatego przyjmujemy

$$\left(\frac{\alpha_{w'}}{\alpha_{w\infty}}\right)_{t \gg \frac{\pi}{2\omega}} \approx e^{-t/\tau_P} \tag{119}$$

Przebieg funkcji (119) w zależności od t dla kilku wartości stałej czasowej $\tau_P = PC$ podano na rys. 19.

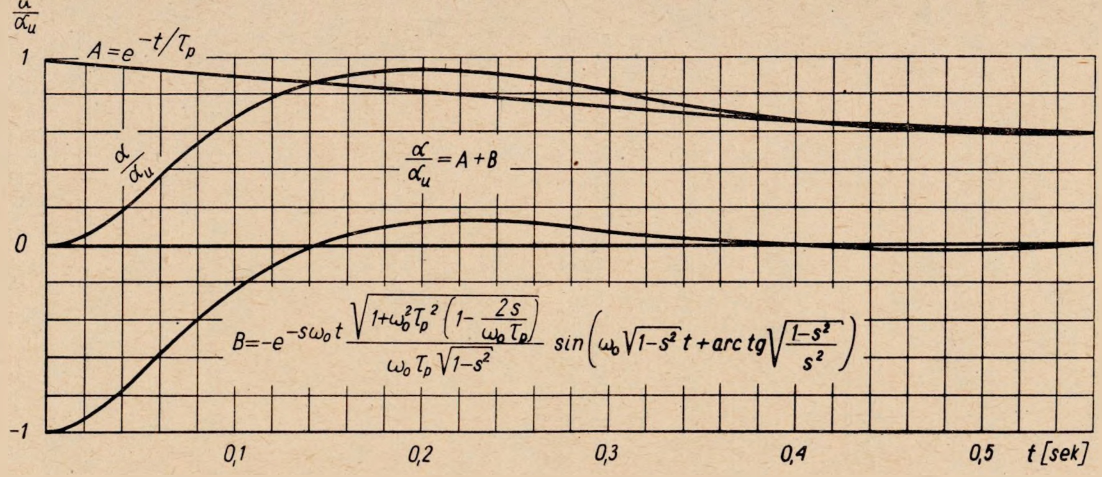
Stosunek amplitud kąta odchylenia wahań przejściowych α_p przy dowolnej stałej czasowej τ_P do kąta odchylenia wahań przejściowych $\tau_{p\infty}$, przy stałej czasowej $\tau_P = \infty$ wynosi:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha_P}{\alpha_{P\infty}} &= \frac{\sqrt{1 + \omega_0^2 \tau_P^2 \left(1 - \frac{2s}{\omega_0 \tau_P}\right)}}{\omega_0 \tau_P} = \sqrt{\frac{1}{\omega_0 \tau_P} + 1 - \frac{2s}{\omega_0 \tau_P}} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{2s-1}{\omega_0 \tau_P}} \end{aligned}\right\} \tag{120}$$

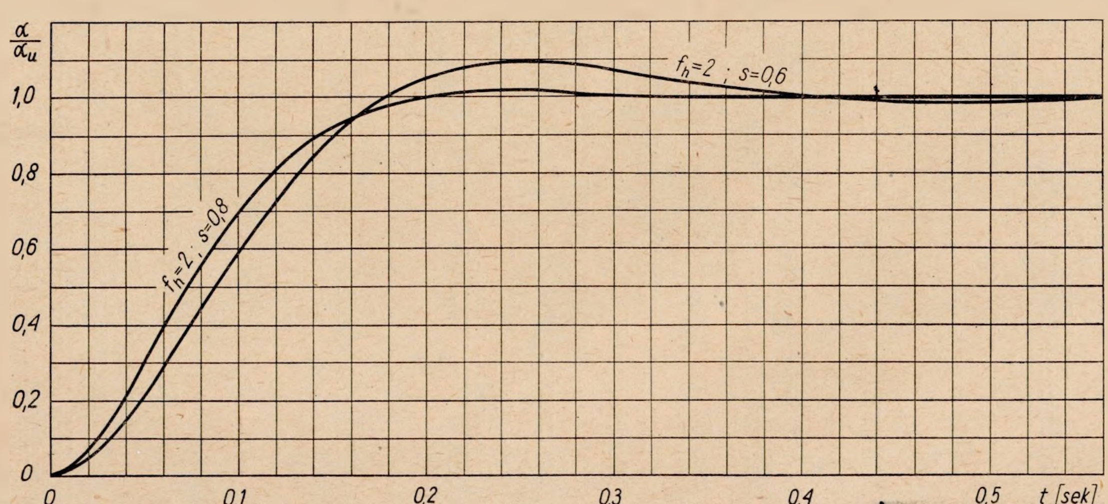


Rys. 20. Wykres zależności $\frac{\alpha_p}{\alpha_{p\infty}}$ w funkcji $\tau_P = PC$ dla $\omega_0 = 10$; $s = 0{,}8$

Przebieg funkcji (120) w zależności od τ_P dla $\omega_0 = 10$, $s = 0{,}8$ podano na rys. 20. Niewiele się różni ona od 1, jeżeli τ_P jest duża. W przybliżeniu można więc rozpatrywać, że ustalanie się wskazania odbywa się wg funkcji (118), a więc wg sinusoidy gasnącej zdążającej do wartości α_u.



Rys. 21. Ilustracja przebiegu ustalania się wskazania na wartość α_u przy $\tau_p = 1$ sek, $s = 0{,}6$ oraz $\omega_0 = 5\pi$



Rys. 22. Ilustracja przebiegu ustalania się wskazania na wartości α_u przy $\tau_p = \infty$, $s = 0{,}6$ lub 0,8 oraz przy $f_h = 2$ Hz

W rzeczywistości, jak wynika z wyrażenia (117), wskazanie zdąża do wartości $\alpha_u \cdot e^{-\frac{2\omega t - \pi}{2\omega \tau_p}}$, malejącej z czasem.

Okres T_h wahań przejściowych określimy wiedząc, że

$$\omega_0 \sqrt{1-s^2} \cdot (t+T_h) = \omega_0 \sqrt{1-s^2} \cdot t + 2\pi$$

stąd

$$T_h = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-s^2}} = \frac{2\pi}{\omega_h} = \frac{T_0}{\sqrt{1-s^2}}$$

Na rysunku 21 przedstawiono przebieg ustalania się wskazania na wartość α_u przy $\tau_p = 1$ sek; $s = 0{,}6$ oraz przy $\omega_0 = 2\pi f_0 = 5\pi$, na rys. zaś 22 przy $\tau_p = \infty$, $s = 0{,}6$ i $0{,}8$ oraz przy $f_h = \frac{1}{T_h} = 2\,\mathrm{Hz}$.

Okres wahań tłumionych T_h zależy od współczynnika ustalania s. Współczynnik s może być dobierany przez zastosowanie odpowiedniego tłumika elektromagnetycznego przy użyciu zwartych zwojów lub zwartej ramki.

W przypadku pracy układu bez tłumienia ($s = 0$) otrzymamy okres wahań swobodnych

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = T_h \cdot \sqrt{1-s^2} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k_z}} \cdot \tag{121}$$

Częstotliwość wahań swobodnych

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_z}{J}} \tag{122}$$

5. ANALIZA DYNAMICZNYCH UCHYBÓW POMIAROWYCH

W miernikach impulsowych wskutek działania impulsu wskazówka miernika odchyla się z położenia zerowego, osiąga wartość pierwszego odchylenia maksymalnego $\alpha_{max\,1}$ (które jest stosunkowo łatwe do odczytania) następnie w przypadku $\tau_p < \infty$ odchylenie to powoli maleje do zera, w przypadku zaś $\tau_p = \infty$ zdąża do wartości α_u.

Jeżeli impulsy mierzone postępują nieregularnie jeden za drugim i mają różne wartości, to pożądane jest, aby wskazówka miernika osiągała wartość $\alpha_{max\,1}$ w możliwie krótkim czasie, a następnie aby odchylenie nie malało zbyt wolno, gdyż wówczas impulsy następne o mniejszych wartościach nie mogłyby być prawidłowo mierzone.

Czas T_1, po którym wskazówka miernika osiągnie wartość $\alpha_{max\,1}$, możemy w przybliżeniu ustalić z wyrażenia (118), przyrównując do zera pierwszą pochodną względem czasu:

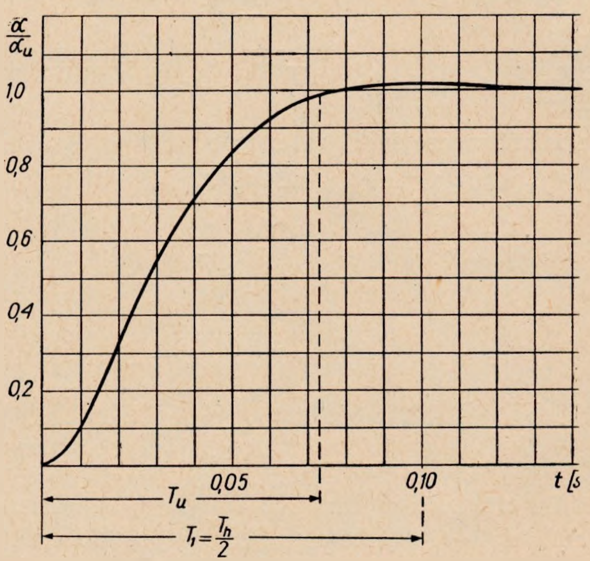
$$\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_u \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot e^{-s \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot t} \cdot \Bigg[\frac{s}{\sqrt{1-s^2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot \sqrt{1-s^2} \cdot t +\right.\\ \left. + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\sqrt{1-s^2} \cdot t + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}\right)\Bigg] = 0\end{aligned}\right\} \quad (123)$$

Ekstremum uzyskamy spełniając warunek

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{T_0}\sqrt{1-s^2} \cdot t + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}\right) = \sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}$$

z którego wynika, że czas T_1, po którym funkcja uzyskuje pierwsze maksimum $\alpha_{max\,1}$, wynosi

$$T_1 = \frac{T_0}{2\sqrt{1-s^2}} = \frac{T_h}{2} \quad (124)$$



Rys. 23. Wykres zależności $\frac{\alpha}{\alpha_u}$ w funkcji czasu t dla przypadku $s = 0{,}8$; $T_h = 0{,}2$ sek

Na rysunku 23 podano przebieg charakterystyki $\frac{\alpha}{\alpha_u} = f(t)$ dla $s = 0{,}8$; $T_h = 0{,}2$ sek.

Ponieważ w miernikach impulsowych pomiar jest wykonywany na podstawie odchylenia maksymalnego $\alpha_{max\,1}$, to w celu uzyskania możliwie dokładnego odczytu pożądane jest, aby w chwili

$$T_1 = \frac{T_0}{2\sqrt{1-s^2}}$$

tj. gdy odchylenie jest maksymalne, było ono nieco większe od wskazania $\alpha_u = \alpha_{w\infty}$. Wówczas przez czasokres odczytu trwający około 0,1 sek, odchylenie będzie w okolicy wartości mierzonej α_u. Wskutek tego jednak, że w położeniu maksymalnym $\alpha_{max\,1}$ wskazówka daje nieco większy odczyt od α_u, mamy tzw. dodatni uchyb dynamiczny.

$$\Delta_{d+} = \frac{\alpha_{max\,1} - \alpha_u}{\alpha_u} \tag{125}$$

W chwili T_1 otrzymamy następujące składowe odchylenia maksymalnego $\alpha_{max\,1}$:

Składowa wymuszona

$$(\alpha_w)_{T_1} = \alpha_u \cdot e^{-t/\tau_P} = \alpha_u \cdot e^{-\frac{T_0}{2\sqrt{1-s^2}\cdot\tau_P}} = \alpha_u \cdot e^{-\frac{T_h}{2\tau_P}} \tag{126}$$

Składowa przejściowa

$$\begin{aligned}(\alpha_P)_{T1} \approx \alpha_{p\infty} = -\alpha_u \cdot e^{-s\omega_0\frac{T_0}{2\sqrt{1-s^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \cdot \sin\Big(\omega_0 \cdot \sqrt{1-s^2} \cdot \\ \cdot \frac{T_0}{2\sqrt{1-s^2}} + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}\Big) = \alpha_u \cdot e^{-\frac{s\pi}{\sqrt{1-s^2}}}\end{aligned} \tag{127}$$

Należy więc spełnić w czasie T_1 zależność

$$\begin{aligned}\alpha_u &= (\alpha_w)_{T_1} + (\alpha_p)_{T_1} - \Delta_{d+} \cdot \alpha_u = \\ &= \alpha_u \cdot e^{-\frac{T_h}{2\tau_P}} + \alpha_u \cdot e^{-\frac{s\pi}{\sqrt{1-s^2}}} - \alpha_u \cdot \Delta_{d+}\end{aligned} \tag{128}$$

lub

$$1 = e^{-\frac{T_h}{2\tau_P}} + e^{-s\pi/\sqrt{1-s^2}} - \Delta_{d+} \tag{129}$$

W szczególnym przypadku, gdy $\tau_P = \infty$, wówczas

$$\Delta_{d+} = e^{-\frac{s\pi}{\sqrt{1-s^2}}} \tag{130}$$

W tym ostatnim przypadku dodatni uchyb dynamiczny jest funkcją współczynnika ustalania s. Funkcja ta jest w przybliżeniu obowiązująca i dla przypadku skończonej, lecz dużej wartości τ_P, aczkolwiek ze zmniejszeniem się stałej czasowej τ_P zwiększa się wpływ składnika $e^{-T_h/2\tau_P} \neq 1$ i wówczas

$$\Delta_{d+} = e^{-s\pi/\sqrt{1-s^2}} + e^{-T_h/2\tau_P} - 1$$

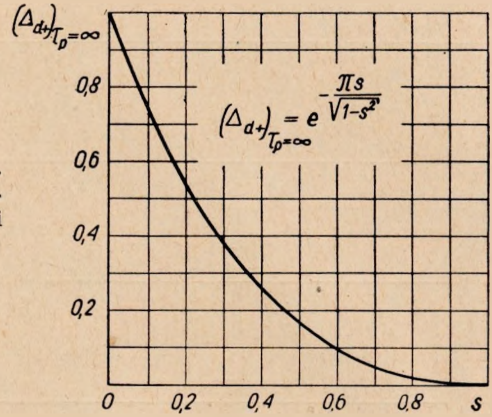
Na rysunku 24 podano wykres zależności dodatniego uchybu dynamicznego Δ_{d+} od wartości współczynnika ustalania s, gdy $\tau_P = \infty$.

Z wykresu wynika, że dla $\tau_P = \infty$, w celu otrzymania dodatniego uchybu dynamicznego w granicach 5%, należy stosować współczynnik ustalania s o wartości większej od 0,68, jeżeli zaś dodatni uchyb dynamiczny chcemy ograniczyć do 2%, to $s \geqslant 0,78$.

Wyznaczmy teraz czas T_x, po którym wskazanie będzie równe wartości

$$\alpha = (\alpha_w)_{T_x} = \alpha_{w\infty} \cdot e^{-T_x/\tau_p}$$

a więc gdy $(\alpha_P)_{T_x} = 0$, tj. gdy składowa odchylenia przejściowego jest równa zeru.



Rys. 24. Wykres zależności dodatniego uchybu dynamicznego Δ_{d+} w funkcji wartości współczynnika ustalania s

Zgodnie z wyrażeniem (117) czas T_x wyznaczamy ze wzoru

$$\sin\left(\omega_0 \sqrt{1-s^2} \cdot T_x + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}\right) = 0 \tag{131}$$

a więc

$$\omega_0 \sqrt{1-s^2} \cdot T_x + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}} = \pi$$

oraz

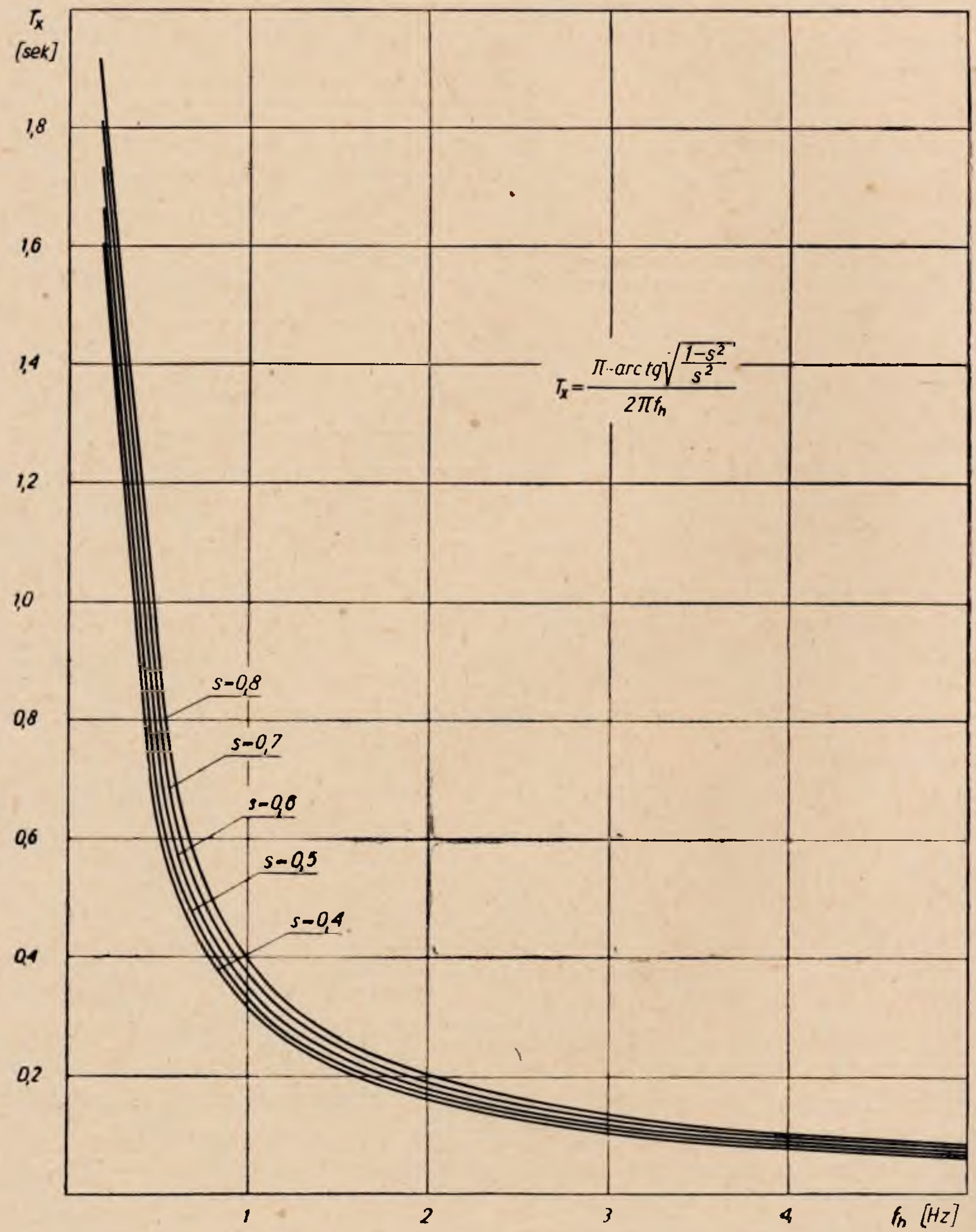
$$\left.\begin{aligned} T_x &= \frac{\pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}}{\omega_0 \sqrt{1-s^2}} = \frac{\pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}}{2\pi f_0 \cdot \sqrt{1-s^2}} = \\ &= \frac{\pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}}{2\pi f_h} = \frac{\pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}}{2\pi} T_h \end{aligned}\right\} \tag{132}$$

Na rysunku 25 zilustrowano zależność (132) dla kilku wartości współczynnika ustalania s.

Z podanych wykresów wynika, że w celu zmniejszenia czasu T_x należy zwiększyć częstotliwość f_h wahań hamowanych układu ruchomego. Ponadto, ze zwiększeniem współczynnika ustalania s należy dodatkowo powiększyć nieco częstotliwość f_h.

W czasie T_x wskazanie miernika wynosi

$$\alpha = \alpha_{w\infty} \cdot e^{-T_x/\tau_p} = \alpha_{w\infty} \cdot e^{-\frac{\pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}}{2\pi f_h \cdot \tau_p}}$$



Rys. 25. Rodzina charakterystyk $T_x = \varphi(f_h)$ dla kilku wartości współczynnika ustalania s

a więc ujemny uchyb dynamiczny wyniesie

$$\Delta_{d-} = \frac{\alpha - \alpha_{w\infty}}{\alpha_{w\infty}} = e^{-\frac{\pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}}{2\pi} \cdot \frac{T_h}{\tau_p}} - 1 \tag{133}$$

W szczególnym przypadku, gdy $\tau_p = \infty$, uchyb dynamiczny ujemny będzie równy zeru.

Pragnąc ustalić takie warunki pracy, przy których ujemny uchyb dynamiczny (w czasie T_x) jest równy dodatniemu uchybowi dynamicznemu (w czasie T_1), należy spełnić równanie

$$e^{-\frac{\pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}}{2\pi} \cdot \frac{T_h}{\tau_p}} - 1 = e^{-\frac{s\pi}{\sqrt{1-s^2}}} + e^{-\frac{T_h}{2\tau_p}} - 1,$$

lub

$$e^{-\frac{\pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}}{2\pi} \cdot \frac{T_h}{\tau_p}} = e^{-\frac{s\pi}{\sqrt{1-s^2}}} + e^{-\frac{T_h}{2\tau_p}}. \tag{134}$$

Z wyrażenia (133) wyznaczymy wartość stosunku $\frac{T_h}{\tau_p}$, przyjmując przybliżenie

$$1 + \Delta_{d-} \approx e^{\Delta_{d-}} \tag{135}$$

gdyż

$$\Delta_{d-} \ll 1$$

Mamy więc

$$e^{\Delta_{d-}} = e^{-\frac{\pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}}{2\pi} \cdot \frac{T_h}{\tau_p}} \tag{136}$$

Z wyrażenia (136) otrzymamy

$$\Delta_{d-} = -\frac{\pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}}{2\pi} \cdot \frac{T_h}{\tau_p} \tag{137}$$

stąd

$$\frac{T_h}{\tau_p} = -\frac{2\pi\Delta_{d-}}{\pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}} \tag{138}$$

Otrzymaną zależność (138) podstawiamy do (134) i otrzymamy wówczas

$$e^{\Delta_{d-}} = e^{-\frac{s\pi}{\sqrt{1-s^2}}} + e^{\frac{\pi \cdot \Delta_{d-}}{\pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}}} \tag{139}$$

Wykorzystując następnie przybliżenia

$$e^{\Delta_{d-}} = 1 + \Delta_{d-}$$

$$e^{\frac{\pi \Delta_{d-}}{\pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}}} = 1 + \frac{\pi \cdot \Delta_{d-}}{\pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}}$$

otrzymamy na podstawie wyrażenia (139)

$$1 + \Delta_{d-} - 1 - \frac{\pi \cdot \Delta_{d-}}{\pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}} = e^{-s\pi/\sqrt{1-s^2}}$$

oraz

$$(\Delta_{d-}) \cdot \left(1 - \frac{\pi}{\pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}}\right) = e^{-s\pi/\sqrt{1-s^2}}.$$

Ostatecznie

$$\Delta_{d-} = \frac{e^{-s\pi/\sqrt{1-s^2}}}{1 - \frac{\pi}{\pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}}} = - \frac{e^{-s\pi/\sqrt{1-s^2}} \cdot \left(\pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}\right)}{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}} \tag{140}$$

Na rys. 26 podano zależność $\Delta_{d-} = f(s)$. Ponieważ uchyb dynamiczny ograniczamy do wartości 5% ÷ 10%, więc minimalny współczynnik ustalania s powinien wynosić 0,74.

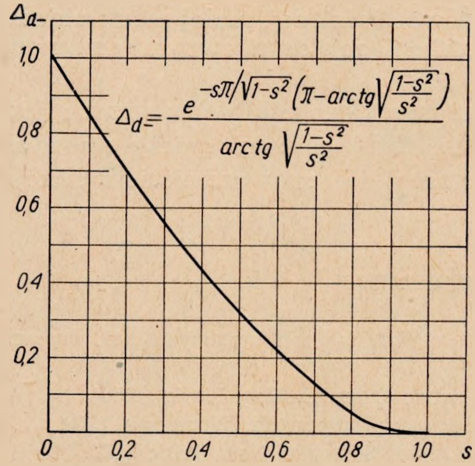
Mając wyrażenie (140) określające Δ_{d-} możemy, na podstawie wzoru (138), wyznaczyć stosunek $\frac{T_h}{\tau_p}$ jako

$$\frac{T_h}{\tau_p} = - \frac{2\pi \cdot \Delta_{d-}}{\pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}} = \frac{2\pi \cdot e^{-s\pi/\sqrt{1-s^2}}}{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}} \tag{141}$$

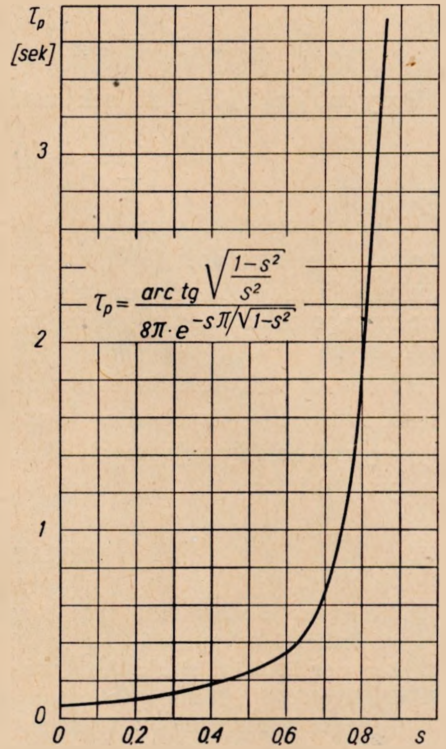
Ze względu na to, że na wykonanie odczytu w warunkach wskazania dynamicznego potrzebny jest czas co najmniej 0,1 sek oraz ponadto ze względu na potrzebę odczytu od chwili T_x, okres T_h wahań hamowanych musi być co najmniej równy 0,2 sek. Przyjmując $T_h = 0{,}25$ sek, otrzymamy zgodnie ze wzorem (141)

$$\tau_p = \frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s^2}{s^2}}}{8\pi \cdot e^{-s\pi/\sqrt{1-s^2}}} \tag{142}$$

Po przyjęciu określonej wartości ujemnego uchybu dynamicznego Δ_{d-} oraz po określeniu na podstawie rys. 26 wartości s można ze wzoru (142) wyznaczyć wymaganą stałą czasową τ_p. Wykres zależności $\tau_p(s)$ podano na rys. 27.



Rys. 26. Wykres zależności ujemnego uchybu dynamicznego Δ_{d-} w funkcji wartości współczynnika ustalania s



Rys. 27. Wykres zależności między wymaganą stałą czasową τ_p a współczynnikiem ustalania s

6. UWAGI DOTYCZĄCE DOBORU PARAMETRÓW PRZYRZĄDU MAGNETOELEKTRYCZNEGO

W przypadku doboru parametrów przyrządu magnetoelektrycznego, odpowiednio do potrzeb pracy w warunkach zasilania impulsowego, wystarczy więc określić dopuszczalny uchyb dynamiczny Δ_d oraz wymagany czas obserwacji, określający okres T_h. Wówczas otrzyma się potrzebny współczynnik ustalania s oraz wymaganą stałą czasową τ_p.

Na przykład w przypadku $\Delta_{d-} = 5\%$ należy przyjąć $s = 0{,}8$ oraz $\tau_p \approx 2$ sek.

Dobór wymaganego okresu T_h wahań hamowanych odbywa się przez ustalenie częstotliwości f_0 swobodnych wahań układu ruchomego miernika, korzystając z zależności:

$$T_h = \frac{1}{f_h} = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2} \cdot f_0} \tag{143}$$

gdzie

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_z}{J}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_z}{mr^2}} \tag{144}$$

Przyjmując $T_h = 0{,}25$ sek ustalamy $f_h = 4$ Hz, co przy $s = 0{,}8$ daje

$$f_0 = \frac{f_h}{\sqrt{1 - s^2}} = \frac{4}{\sqrt{1 - 0{,}8^2}} = \frac{4}{0{,}6} = 6{,}7\,\text{Hz}$$

W celu uzyskania tak dużej częstotliwości mechanicznej f_0 należy, zgodnie ze wzorem (144), stosować układ ruchomy o wąskiej ramce (małe r), małej wskazówce lub o wskazówce świetlnej, małej masie układu ruchomego oraz stosować silne sprężynki dające stosunkowo duży moment zwrotny.

Ponieważ wskutek dużego momentu zwrotnego czułość przyrządu jest mała, więc dla uzyskania dostatecznie dużej czułości należy stosować w przyrządach impulsowych silne magnesy, dające w szczelinie indukcję powyżej 0,3 Ts.

WYKAZ LITERATURY

1. *Biessonow L.*: Pierechodnyje processy w nieliniejnych elektriczeskich cepiach so staliu. Moskwa 1951.
2. *Brenner E.* i *Javiel M.*: Analysis of Electric Circuits. New York 1959.
3. *Cholewicki T.*: Metody obliczania obwodów elektrycznych. Warszawa 1959.
4. *Gardner M., Barnes J.*: Transients in Linear Systems. New York 1952.
5. *Jorisz J. J.*: Izmierenje wibracji. Moskwa 1956.
6. *Seshu S.* i *Balabanian N.*: Linear Network Analisis. New York 1959.
7. *Węgrzyn S.*: Rachunek operatorowy. Warszawa 1955.

М. Лапиньски

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ИМПУЛЬСНЫХ ЛАМПОВЫХ ВОЛЬТМЕТРАХ С ПИКОВЫМ ВЫПРЯМЛЕНИЕМ

Резюме

Приведен анализ нестационарных электрических и механических процессов в импульсных ламповых вольтметрах.

После произведения анализа нестационарных электрических процессов в диапазоне проводимости диода, выведены точные формулы для нестационарного тока i заряжающего конденсатор, а также для неустановившегося напряжения U_C, выступающего на конденсаторе. После принятия допускаемых упрощений, в некоторых особенных условиях работы получаются, известные из литературы, формулы Р. Рюденберга и формулы, описывающие работу ламповоэлектростатического вольтметра.

На основании функции, определяющей неустановившееся напряжение U_C, была определена погрешность заряда зависимая от продолжительности импульса, а также от постоянной времени разряда и заряда.

Анализ механических причин нестационарных показаний вольтметра привёл к выведению формулы, определяющей зависимость угла отклонения α от времени, при разных значениях коэффициента устанавливания s. В заключительной части статьи автор подал анализ динамических погрешностей измерений в зависимости от периода механических колебаний подвижных частей измерительного прибора. Введено понятие положительной динамической измерительной погрешности, вызванной отклонением выше правильного значения и отрицательной динамической погрешности. Кроме этого приведены замечания, касающиеся соответственного подбора параметров магнитоэлектрического прибора, работающего в ламповых импульсных измерителях.

M. Łapiński

TRANSIENT PHENOMENA IN THE VACUUM TUBE PEAK-TYPE VOLTMETERS FOR PULSE MEASUREMENTS

Summary

An analysis is given of electrical and mechanical transient phenomena in the vacuum tube peak-type pulse voltmeters.

After presenting an analysis of electrical transient phenomena the exact formulas are derived for transient charging current i and transient voltage U_C on the capacitor, for the conductivity period of the diode.

After assuming the simplifications tolerable in some special working conditions the author obtained the well known R. Rüdenberg's formulas as well as the formulas for the vacuum tube electrostatic voltmeter. Further the author determines the error of the capacitor charging, depending on the pulse duration and the charging and discharging time constants.

An analysis of transient instrument indications permits to deduce the formula giving the deflection angle α as a time function for different values of establishing coefficient s.

In the last part of this paper is given an analysis of dynamic measuring errors depending on mechanical parameters of the instrument.

The author introduces a notion of a positive dynamic error, resulting from the deflection above the correct value and of the dynamic negative one. Moreover some remarks are given, concerning the right choice of the parameters of a magnetoelectric measuring instrument, working in the vacuum tube pulse voltmeter.

M. Łapiński

LES PHÉNOMÈNES TRANSITOIRES DANS LES MESURES DES IMPULSIONS AU MOYEN DES VOLTMÈTRES DE CRÊTE À TUBES ÉLECTRONIQUES

Resumé

L'auteur présente une analyse des phénomènes transitoires électriques et mécaniques dans les mesures des impulsions au moyen des voltmètres de crête à tubes électroniques.

Après avoir analysé les phénomènes transitoires électriques dans le domaine de conductivité de diodes il déduit les formules exactes pour le courant transitoire de charge du condensateur i ainsi que la tension transitoire U_C qui apparait au condensateur.

Après avoir accepté les simplifications admissibles dans certaines conditions spéciales du travail il obtient les formules bien connues dans la littérature, à savoir les formules de R. Rüdenberg ainsi que les formules pour le voltmètre électrostatique à tubes électroniques. D'après la fonction définissant la tension transitoire U_C au condensateur, l'auteur détermine l'écart de la charge, dependant de la durée de l'impulsion ainsi que les constantes de temps de la charge et de la décharge. Une analyse des indications transitoires de l'instrument permet d'établir la formule pour l'angle de déviation α en fonction de temps pour diverses valeurs du coefficient d'établissement s.

Dans la partie finale du travail l'auteur analyse les écarts de mesures dynamiques en fonction des paramètres mecaniques de l'instrument. Il a introduit la notion de l'écart de mesure dynamique positif résultant de la déviation au dessus de la valeur correcte et de l'écart dynamique négatif.

Il présente enfin quelques remarques, concernant le choix approprié des paramètres des instruments magnetoélectriques, fonctionnant dans les voltmètres à tubes électroniques.

M. Łapiński

EINSCHWINGVORGÄNGE IN IMPULS-RÖHRENVOLTMETERN MIT SCHEITELGLEICHRICHTUNG

Zusammenfassung

Es werden elektrische und mechanische Einschwingvorgänge in Impuls-Röhrenvoltmetern untersucht.

Nach einer Untersuchung der elektrischen Einschwingvorgänge im Durchlassbereich der Diode werden exakte Formeln für den flüchtigen Ladestrom i des Kondensators und für die flüchtige Spannung U_C an demselben abgeleitet. Nach Annahme von Vereinfachungen, die in bestimmten speziellen Betriebsbedingungen zulässig sind, ergeben sich die aus dem Schrifttum bekannten Formeln von R. Rüdenberg sowie Formeln, die die Wirkungsweise des elektrostatischen Röhrenvoltmeters beschreiben.

Aus der die flüchtige Spannung U_C bestimmenden Funktion wird der auf dem Ladungsvorgang beruhende Messfehler bestimmt; er hängt von der Zeitdauer des Impulses sowie von den Zeitkonstanten der Ladung und der Entladung ab.

Die Untersuchung der mechanischen Einschwingvorgänge der Messanzeige führt auf Ableitung einer Formel für die Zeitabhängigkeit des Ablenkwinkels α bei verschiedenen Werten des Einschwingfaktors s.

Zum Schluss wird die Abhängigkeit der dynamischen Messfehler von der mechanischen Schwingungsperiode des Messystems und von dem Einschwingfaktor s untersucht. Es wird der Begriff des auf dem Überschwingen beruhenden positiven dynamischen Messfehlers und derjenige des negativen dynamischen Messfehlers eingeführt. Es werden ausserdem gewisse Bemerkungen zu der Frage der richtigen Wahl von Kennwerten des in Impuls-Röhrenmesseinrichtungen betriebenen Drehspul-instrumentes mitgeteilt.

PRZEGLĄD TELEKOMUNIKACYJNY

ORGAN SEKCJI TELEKOMUNIKACYJNEJ
STOWARZYSZENIA ELEKTRYKÓW POLSKICH
Rok założenia 1928, miesięcznik, stron 36,
format A 4,
Wydawnictwo N O T
Adres redakcji — Warszawa, Barbary 2, VII p.

Czasopismo poświęcone zagadnieniom podstawowym o charakterze teoretycznym, zagadnieniom problemowym i postępu technicznego z dziedziny telekomunikacji, elektroakustyki, elektroniki technicznej i dziedzin pokrewnych, omawia nowe systemy i urządzenia telekomunikacyjne, zagadnienia projektowania, eksploatacji i konserwacji tych urządzeń, sprawozdania z konferencji naukowych, zjazdów oraz wystaw krajowych i zagranicznych. Każdy numer posiada następujące stałe dodatki: Przegląd Dokumentacyjny Telekomunikacji oraz biuletyny: Instytutu Tele- i Radiotechnicznego, Przemysłowego Instytutu Telekomunikacji i Instytutu Łączności.

Czasopismo przeznaczone jest dla inżynierów i studentów wyższych uczelni technicznych.

ZESZYT 2(27)

PRAC INSTYTUTU ŁĄCZNOŚCI

zawierać będzie
następujące artykuły:

1. *P. Szulkin* — Niektóre wyniki teorii synchronizacji falą ciągłą o stałej częstotliwości
2. *S. Jasiński* — Zachowanie się warstwy jonosferycznej *E* obserwowane w Miedzeszynie (Warszawa) podczas zaćmienia słonecznego w dn. 15 lutego 1961 r.
3. *J. Kibortt* i *J. Trechciński* — Przykłady zastosowania rejestrów w centralach systemu Strowgera