

MINISTERSTWO ŁĄCZNOŚCI

INSTYTUT ŁĄCZNOŚCI  
BIBLIOTEKA NAUKOWA

Nr \_\_\_\_\_

**PRACE  
INSTYTUTU ŁĄCZNOŚCI**

ROK XVII

ZESZYT 1(57)

1970

WARSZAWA 1970

WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE

SPIS TREŚCI

1. *Andrzej Galoch* — Wybrane metody programowania optymalizacyjnego i możliwości ich zastosowania w rozwiązywaniu ekonomicznych problemów łączności . . . . . 3

СОДЕРЖАНИЕ

1. *A. Galoch* — Избранные методы программирования (оптимизации) и возможности их применения в случае решения экономических вопросов связи 3

CONTENTS

1. *A. Galoch* — Selected methods for optimum programming and possibilities of their applications in resolving the telecommunications economical problems . . . . . 3

SOMMAIRE

1. *A. Galoch* — Méthodes choisies de programmation optimale et possibilités de les appliquer pour la solution des problèmes économiques de télécommunications . . . . . 3

INHALTSVERZEICHNIS

1. *A. Galoch* — Ausgewählte Methoden der Programmbearbeitung für optimale Rechnung und die Möglichkeiten deren Anwendung zum Lösen der ökonomischen Probleme des Fernmeldewesen . . . . . 3

MINISTERSTWO ŁĄCZNOŚCI

PRACE  
INSTYTUTU ŁĄCZNOŚCI

ROK XVII

ZESZYT 1(57)

WARSZAWA 1970

---

WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE

Komitet Redakcyjny  
Redaktor Naczelny — *prof. mgr inż. Sylwester Jarkowski †*

Redaktorzy działów:  
*mgr inż. Aleksy Brodowski, prof. mgr inż. Lesław Kędziński,*  
*dr Stanisław Włoszczowski*  
Sekretarz Redakcji — *Janina Janicka*

Adres Redakcji:  
Instytut Łączności, Warszawa-Miedzeszyn, ul. Szachowa 1

WSZELKIE PRAWA ZASTRZEŻONE

*Printed in Poland*

Opracowano w Dziale Wydawniczym Instytutu Łączności

---

WNT. Warszawa 1970, Wyd. 1, Nakład 600 egz. Ark. wyd. 4,2 Ark.  
druk. 3,75 (4,99/A) Format B5. Papier ilustrac. kl. V. 70 g. Oddano  
do składania 1.8.1970 r. Podpisano do druku w grudniu 1970 r. Druk  
ukończono w grudniu 1970 r. Symbol 80458/INB Cena zł 16,—

---

Pozn. Zakł. Graf. im. M. K. — Poznań. Zam. 12132/70—B-1/1127



ANDRZEJ GALOCH

## WYBRANE METODY PROGRAMOWANIA OPTYMALIZACYJNEGO I MOŻLIWOŚCI ICH ZASTOSOWANIA W ROZWIĄZANIU EKONOMICZNYCH PROBLEMÓW ŁĄCZNOŚCI

Rękopis dostarczono do Komitetu Redakcyjnego dnia 11.11.1969 r.

W artykule przedstawiono szereg propozycji wykorzystania metod optymalizacyjnych do rozwiązywania wybranych zagadnień ekonomiczno-technicznych z dziedziny poczty i telekomunikacji.

Dla zilustrowania problematyki posłużono się numerycznymi przykładami zastosowania metod programowania liniowego, a także ogólnym przykładem z zakresu programowania dynamicznego.

Część metodologiczną opracowania poprzedzono teoretycznym wykładem problematyki rachunku optymalizacyjnego.

### 1. WSTĘP

Metody matematyczne znajdują od szeregu już lat szerokie zastosowanie w wielu gałęziach gospodarki narodowej. Przyniosło to w efekcie odczuwalną poprawę w działalności poszczególnych gałęzi zarówno jeżeli idzie o bezpośrednie wyniki gospodarcze, jak i usprawnienie metod planowania oraz zarządzania.

Wychodząc naprzeciw coraz silniejszym tendencjom do unowocześniania i uściślenia metod planistycznych w gospodarce narodowej, opracowanie to jest próbą kompleksowego ujęcia i adaptacji matematycznych metod programowania optymalizacyjnego na użytek łączności. Znane bowiem dotychczas prace autorów krajowych z tego zakresu mają głównie charakter opracowań przyczynkowych, zajmujących się poszczególnymi przypadkami zastosowania metod matematycznych i ekonometrycznych (a w tym metod optymalizacyjnych) do wycinkowych zagadnień łączności<sup>1)</sup>. Pewne uogól-

<sup>1)</sup> Wymienić tu wypada pracę Z. Rafałowicza: Planowanie perspektywicznego rozwoju telefonii. WKiŁ 1963 i następujące prace Zb. Dudzińskiego: 1) Matematyczne rozwiązanie sieci telekomunikacyjnej za pomocą algorytmu simpleks (Prace IŁ, zes. 1 (34) 1964); 2) Zastosowanie metod matematycznych do optymalizacji wybra-

nienie na gruncie problematyki wyłącznie telekomunikacyjnej zawiera opracowanie Zb. Dudzińskiego z BPPŁ pt. „Zastosowanie metod matematycznych do optymalizacji wybranych zagadnień sieci telekomunikacyjnych” (Warszawa 1967).

Należy nadmienić, że w łączności zyskały sobie dość duże — jak dotąd — uznanie metody ekonometrycznej analizy rozwoju usług i sił wytwórczych tej dziedziny, co znalazło wyraz między innymi w wydaniu pracy Z. Rafałowicza: „Planowanie perspektywicznego rozwoju telefonii” oraz w szeregu maszynopisowych opracowań Biura Planów Perspektywicznych Łączności<sup>2)</sup>, natomiast zdecydowanie mniej uwagi poświęca się teoretyczno-metodologicznym aspektom zastosowania matematycznych metod programowania optymalizacyjnego. Między innymi z tych względów w artykule niniejszym — jak już podkreśliliśmy na początku — zajmujemy się wyłącznie zastosowaniem matematycznych metod programowania optymalizacyjnego do rozwiązania szeregu zagadnień zarówno z dziedziny łączności pocztowej, jak i telekomunikacyjnej.

## 2. SFORMUŁOWANIE OGÓLNEGO ZAGADNIENIA PROGRAMOWANIA OPTYMALIZACYJNEGO

### 2.1. Wprowadzenie

Rozwiązanie zadania optymalizacji dowolnego problemu gospodarczego przebiega w kilku etapach.

Interesujący nas problem poddajemy na wstępie kompleksowej i wyczerpującej analizie ekonomicznej, mającej pomóc w określeniu celu konkretnej działalności (może nim być np. wytwarzanie dóbr, możliwie największe obniżenie nakładów, odpowiednio wysoki poziom rentowności itp.)

---

nych zagadnień sieci telekomunikacyjnych (BPPŁ, Warszawa 1967); 3) Próba analizy stosunków między gospodarką narodową a łącznością (przy zast. metod analizy przepływów międzdziałowych) (Prace IŁ 2 (46) 1967); 4) Zagadnienie optymalnego rozkładu zmian personelu w warunkach nierównomiernego natężenia pracy (Problemy Łączności nr 30/1968) oraz A. Osmyckiego i J. Żurkowskiego: Zastosowanie analizy input-output do prognozy rozwoju perspektywicznego w latach 66—85, ze szczególnym uwzględnieniem potrzeb inwestycyjnych w poszczególnych 5-leciach (KP przy RM, Warszawa 1968) i A. Galocha: Kryteria alokacji sił wytwórczych w dziedzinie łączności (Problemy Łączności nr 30/1968).

<sup>2)</sup> Na przykład Zb. Dudziński: Współzależność między rozwojem łączności a rozwojem gospodarki narodowej. Prace IŁ, 4 (40) 1965; Zb. Dudziński, J. Kulesza: Badanie współzależności między rozwojem telekomunikacji a rozwojem gospodarki narodowej w skali światowej i w Polsce. BPPŁ 1968.

oraz środków jej realizacji (finansowych, rzeczowych). Z kolei (w praktyce — równocześnie) musimy rozważyć techniczno-ekonomiczne, a nawet polityczno-społeczne warunki, w jakich ma przebiegać realizacja postawionego zadania.

Po przeprowadzeniu analizy ekonomicznej można przystąpić do konstruowania matematycznego modelu, w którym wyrażą się wyżej wymienione kategorie ekonomiczno-prakseologiczne: cel, środki i warunki realizacji określonego przedsięwzięcia gospodarczego. Kolejno zatem zdeterminujemy funkcyjną postać kryterium wyboru rozwiązania ekonomicznego oraz zbiór warunków o charakterze techniczno-bilansowym, za pomocą których odzwierciedlimy istotne zależności techniczno-ekonomiczne zachodzące wewnątrz badanego układu gospodarczego.

Od strony matematycznej zadanie programowania sprowadzi się ostatecznie do znalezienia wartości zmiennych decyzyjnych  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) o jednoznacznej interpretacji ekonomicznej. Mogą to być np. szukane wielkości produkcji globalnej czy finalnej usług łączności w modelach optymalizujących strukturę produkcji, odległości lub koszty w modelach optymalizujących zagadnienia transportowe, ilości środków finansowych lub rzeczowych w modelach optymalizujących rozdział sił wytwórczych itp.

Wartości tych zmiennych optymalizują wybraną przez nas formę funkcyjną, którą nazwaliśmy wyżej funkcją-kryterium. Ogólny model optymalizacyjny zawiera zatem:

- 1) funkcję-kryterium, o postaci ogólnej:

$$Z = \bar{r}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

określoną na zbiorze wartości zmiennych decyzyjnych i podlegającą optymalizacji, co oznacza że musimy określić składowe wektora  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), przy których funkcja kryterium przyjmie wartość minimum lub maksimum, zależnie od warunków zadania;

- 2) warunki dodatkowe (ograniczenia modelu), jakie mają spełniać wartości zmiennych decyzyjnych, opisane przez układ zależności techniczno-bilansowych typu:

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \gtrless b_j \quad j = 1, 2, \dots, m$$

przy czym współczynniki  $b_j$  są składowymi wektora  $\|b_1, b_2, \dots, b_m\|^T$ , czyli wektora parametrów określających  $m$  ograniczeń bilansowych układu (którymi są np. limity środków inwestycyjnych, czasu, zdolności wytwórczych przedsiębiorstwa itp.);

- 3) warunki brzegowe, typu:

$$x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

wynikające z natury procesów gospodarczych, które gwarantują równocześnie, że poszukiwane wielkości (zmiennie decyzyjne) nie przyjmą war-



tości ujemnych (co nie miałyby sensu np. w stosunku do odległości, czasu, rozmiarów produkcji czy zasobów gospodarczych).

## 2.2. Warunki i ogólne zasady rozwiązywania modeli optymalizacyjnych

Należy stwierdzić, że jakkolwiek dla odrębnych typów programowania optymalizacyjnego istnieją szczegółowe metody rozwiązań, to jednak przy spełnieniu pewnych założeń formalnych można podać również ogólną metodę rozwiązywania, w której wykorzystujemy narzędzia rachunku różniczkowego<sup>1)</sup>.

Wspomniane wyżej założenia wymagają przyjęcia następujących uproszczeń:

1) funkcja, którą mamy optymalizować, musi być ciągła i różniczkowalna;

2) oznacza to, że musi posiadać ciągle pochodne cząstkowe I i II rzędu;

3) ponadto, dla zmiennych ze zbioru  $\{x_i\}$ , musi być funkcją rosnącą, czyli jej pochodne cząstkowe  $\partial F/\partial x_i$  muszą być dodatnie.

Ten ostatni warunek ma na celu eliminację ewentualności ujemnego wpływu dowolnego zastosowanego środka na stopień realizacji celu wyrażonego za pomocą funkcji-kryterium (przypadek, gdy  $\partial F/\partial x_i < 0$ ) lub wyrugowanie środków, których zastosowanie jest obojętne z uwagi na ten cel (gdy  $\partial F/\partial x_i = 0$ ). Wszelki przyrost środków transportu jest na przykład bezużyteczny, jeżeli brak równoległe personelu do ich obsługi.

Podobne założenia obowiązują w odniesieniu do zależności układu bilansowego (por. pkt. 2 na s. 5).

Przy powyższych założeniach zadanie optymalizacyjne sprowadza się do wyznaczenia zbioru rozwiązań dopuszczalnych, przy których wartości zmiennych decyzyjnych spełniają zarówno warunki brzegowe (tzn. rozwiązanie zawiera wyłącznie wartości nieujemne), jak i bilansowe (wartości zmiennych decyzyjnych przyjęte w rozwiązaniu ostatecznym nie powodują naruszenia wewnętrznych więzi bilansowych układu). W dalszej kolejności szukamy w tym zbiorze rozwiązania optymalnego (bądź alternatywnych rozwiązań optymalnych).

Należy zaznaczyć, że wykorzystanie metod optymalizacyjnych ma tylko wtedy sens, gdy istotnie w danym zadaniu występuje problem wyboru ekonomicznego. W interpretacji matematycznej ilość zmiennych w modelu optymalizacji musi w takim przypadku przewyższać liczbę zależności występujących ostatecznie w postaci równań układu bilansowego (por. pkt. 2 na s. 5). Gdyby bowiem liczba zmiennych pokrywała się z liczbą równań

<sup>1)</sup> Stąd nazwa tej metody: „programowanie marginalne” (por. O. Lange: „Optymalne decyzje”. PWN, Warszawa 1967, wyd. 2, s. 56).



bilansowych, mielibyśmy do czynienia po prostu z układem oznaczonym, w którym wszystkie niewiadome są z góry zdeterminowane (tzn. dają się wyznaczyć najprostszymi metodami algebraicznymi). Natomiast przy danym stopniu swobody <sup>1)</sup> dla określonej liczby zmiennych odpowiadającej temu stopniowi, możemy przyjąć dowolne w sensie formalnym, lecz uzasadnione ekonomicznie wartości  $i$  z ich pomocą określić wartości zmiennych pozostałych. Oznacza to, że  $m$  zmiennych jest funkcją  $n-m$  zmiennych wybranych dowolnie:

$$x_i (i = 1, 2, \dots, m) = g(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$$

W praktycznych rozwiązaniach z reguły pierwsze  $m$  zmiennych przyjmujemy jako funkcje zmiennych pozostałych. Warunek rozwiązywalności układu bilansowego sprowadza się wówczas do tego, aby jego wyznacznik funkcyjny (jakobian) był różny od zera <sup>2)</sup> dla każdej wartości zmiennych decyzyjnych  $x_i$  w rozpatrywanym obszarze (tzw. układ nieosobliwy), co przedstawiamy niżej:

$$\frac{W(f_1, f_2, \dots, f_m)}{W(x_1, x_2, \dots, x_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0$$

Nie wnikając w szczegóły strony rachunkowej wyznaczania ogólnego rozwiązania optymalnego dowolnego zadania programowania, wyjaśnimy, że sprowadza się ono ostatecznie do określenia ekstremum warunkowego funkcji wielu zmiennych (typu jak w pkt. 1 na s. 5), przy uwzględnieniu pozostałych zależności funkcyjnych układu (por. pkt. 2 i 3 na s. 5). Zadanie to da się rozwiązać metodą „mnożników nieoznaczonych *Lagrange'a* <sup>3)</sup>.

### 2.3. Graficzna interpretacja problemu programowania optymalizacyjnego

Każde rozwiązanie programu przyjmujemy za punkt w przestrzeni  $n$ -wymiarowej. Warunki brzegowe dopuszczają wyłącznie punkty o współrzędnych nieujemnych.

<sup>1)</sup> Określa go różnica między liczbą zmiennych decyzyjnych —  $n$  a liczbą równań —  $m$  danego układu.

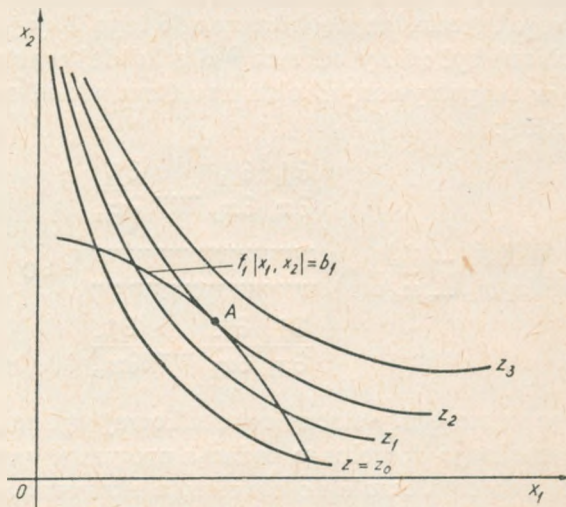
<sup>2)</sup> O. Lange: op. cit., s. 58.

<sup>3)</sup> Zainteresowanych teoretyczno-rachunkową stroną tej metody odsyłamy do książki O. Langego: *Optymalne decyzje*. PWN, Warszawa 1967, wyd. 2.

Przy  $n-m$  stopniach swobody programy wewnętrznie zgodne zawierają się w  $n-m$  wymiarowej bryle. Rozwiązania optymalne leżą na jej wierzchołkach (tzn. w punktach lokalnego ekstremum).

Konkretyzując rozważania do przypadku, gdy  $n = 3$  i  $m = 1$ , tzn. gdy w programie występują trzy zmienne związane jednym równaniem bilansowym  $f_1(x_1, x_2, x_3) = b_1$ , mamy do czynienia z dwuwymiarowym obszarem rozwiązań dopuszczalnych, gdyż  $n-m$  w tym wypadku równe jest 2. Na wierzchołkach otrzymanego wieloboku leżą rozwiązania optymalne.

Gdybyśmy z kolei przyjęli, że  $n = m$ , (tzn. liczba zmiennych odpowiada liczbie równań układu bilansowego), wówczas rozwiązanie dopuszczalne miałyby wymiar  $3 - 3 = 0$ , czyli byłoby punktem w przestrzeni trójwymiarowej. Jak już nadmienialiśmy, zadanie tego rodzaju posiadało-



Rys. 1. Graficzna interpretacja problemu optymalizacji

by jednoznacznie określony program narzucony z góry przez warunki ograniczające.

Wybór programu optymalnego ze zbioru programów wewnętrznie zgodnych dla prostego przypadku w przestrzeni dwuwymiarowej można zinterpretować geometrycznie jak następuje:

#### Opis rozwiązania

Rozwiązujemy program zawierający dwie zmienne decyzyjne  $x_1$  i  $x_2$  oraz 1 warunek bilansowy  $f_1(x_1, x_2) = b_1$ .

Przyjmując kolejne wartości dla  $Z = F(x_1, x_2)$  (funkcja-kryterium) tworzące ciąg wyrazów  $z_0, z_1, z_2, \dots$  i rozwiązując równanie przy tych zadanych wartościach, otrzymamy rodzinę krzywych na płaszczyźnie, poło-

zonych coraz dalej od początku układu współrzędnych (bierzemy naturalnie pod uwagę wyłącznie I ćwiartkę układu). W miarę wzrastania wartości jednej z dwu zmiennych decyzyjnych wzrasta również wartość całej funkcji  $Z = F(x_1, x_2)$ , co wynika z uprzednio przyjętego założenia o własnościach pochodnych cząstkowych tej funkcji.

Wykresem równania bilansowego  $f_1(x_1, x_2) = b_1$  jest także pewna krzywa. Tworzy ona „obszar” rozwiązań dopuszczalnych. Punkt optimum warunkowego zadania musi leżeć równocześnie na linii rozwiązań dopuszczalnych oraz na jednej z linii „izocelowych”<sup>1)</sup>, co pokazano na rys. 1.

Problem optymalizacji w przestrzeni  $n$ -wymiarowej (gdzie  $n$  oznacza dowolnie dużą liczbę naturalną) ma analogiczną interpretację. W przypadku programu o  $n$  zmiennych zamiast rodziny krzywych otrzymujemy rodzinę hiperpowierzchni  $n-1$  wymiarowych. Rozwiązanie optymalne leży w obszarze rozwiązań dopuszczalnych, czyli w granicach  $m$  wymiarowego tworu geometrycznego ( $m =$  liczba warunków bilansowych programu), a równocześnie na hiperpowierzchni odpowiadającej najwyższemu możliwemu stopniowi realizacji celu.

### 3. KLASYFIKACJA MODELI OPTIMALIZACYJNYCH<sup>2)</sup>

Z uwagi na rodzaj problemów ekonomicznych rozwiązywanych za pomocą metod programowania optymalizacyjnego, można wyróżnić następujące klasy modeli:

- 1) modele zamkniętego szlaku,
- 2) modele przydziałów,
- 3) modele mieszanki,
- 4) modele programowania dynamicznego<sup>3)</sup>.

Za pomocą modeli pierwszego rodzaju optymalizujemy wybór dowolnej trasy zamkniętej z punktu widzenia określonego kryterium ekonomicznego (np. minimalizacji czasu przejazdu, kosztów transportu, długości trasy). Klasyczne ujęcie tego typu zagadnień jest znane w literaturze przedmiotu pod nazwą „problemu komiwojażera”.

<sup>1)</sup> O. Lange: Optymalne decyzje. PWN, Warszawa 1967, wyd. 2, s. 60.

<sup>2)</sup> Omawiamy tu klasyfikację przeprowadzoną z uwagi na pierwsze kryterium klasyfikacji, tzn. rodzaj problemu ekonomicznego. Inne klasyfikacje z uwagi np. na charakter zależności i wyrażeń formalnych modelu podane są m.in. w pracach: W. Sadowskiego: Teoria podejmowania decyzji. PWE, Warszawa 1964, wyd. 3, Zb. Pawłowskiego: Ekonometria. PWN, Warszawa 1966, Z. Hellwiga (red.): Zarys ekonometrii. PWE, Warszawa 1967.

<sup>3)</sup> Odnośnie powyższej klasyfikacji por. O. Lange: Optymalne decyzje. PWN, Warszawa 1967, wyd. 2, s. 53.



Jak łatwo spostrzec, modele zamkniętego szlaku dadzą się zastosować przy rozwiązywaniu szeregu zagadnień z zakresu transportu pocztowego, a także telekomunikacji (budowy s.eci).

Modele przydziałów w swojej klasycznej postaci sprowadzają się do zadań optymalizacji rozdziału bądź zadań produkcyjnych, bądź środków ich realizacji między poszczególne kierunki (działy) wytwórcze. Efekt takiego rozdziału winien być przy określonych założeniach możliwie największy. Do tej klasy modeli zaliczymy bardzo ważne zagadnienie planowania kierunków inwestycyjnych<sup>1)</sup>, a także pewną odmianę tzw. zagadnień transportowych, czyli zadań optymalizujących otwarte trasy przewozowe z uwagi na wspomniane wyżej kryteria, przy równoczesnym spełnieniu warunku pełnej realizacji określonego programu przewozu.

Modele mieszanki lub substytucji sprowadzają się z kolei do ułożenia optymalnego programu łącznego wykorzystania dysporowanych środków (np. transportowych). Tego typu zadaniem na gruncie łączności może być problem ustalenia właściwej struktury parku samochodowego łączności pocztowej pod kątem realizacji określonego programu przewozu po ustalonej trasie, biorąc pod uwagę przy tym odmienność charakterystyk ładowności pojazdów wchodzących w skład tego parku.

W odniesieniu do zagadnień dynamicznego ujęcia programów optymalizacyjnych możemy mówić o dwojakim ich rozumieniu. W jednym przypadku do klasy problemów dynamicznych zaliczymy wyłącznie zagadnienia uwzględniające czynnik czasu konkretnie<sup>2)</sup>, przy czym sam model rozwiązywalny jest tradycyjnie (np. problem rozdziału funduszu inwestycyjnego w okresie planu 5-letniego, który daje się rozwiązać przy wykorzystaniu metod programowania liniowego). W drugim przypadku za kryterium wyróżniania problemów dynamicznych przyjmuje się właśnie sposób rozwiązywania dowolnego zadania gospodarczego<sup>3)</sup>. Właściwy tego typu modelom dynamicznym rachunek rekurencyjny może bowiem służyć do rozwiązywania zagadnień, w których czynnik czasu nie występuje bezpośrednio. Ostatecznie więc pod pojęciem dynamiki rozumie się logiczny proces sekwencyjnego rozpatrywania zagadnień. W procesie tym każdy problem dzielimy na umowne (lecz wynikające naturalnie z rzeczywistego przebiegu procesu) stadia „kolejno” po sobie następujące. Takim

<sup>1)</sup> Teoretyczno-metodologiczne aspekty tego zagadnienia są przedmiotem rozważań zawartych w pracy planowej wykonanej w Zakładzie Ekonomiki Łączności IŁ w 1969 r.: *Andrzej Galoch — Zagadnienia optymalnej alokacji sił wytwórczych w pp. Polska Poczta, Telegraf i Telefon (maszynopis)*.

<sup>2)</sup> *Oskar Lange: op. cit., rozdz. VIII—XI.*

<sup>3)</sup> *M. Lesz: Techniczno-ekonomiczne zastosowanie metod programowania dynamicznego. PWE, Warszawa 1968, str. 5—10, R. E. Bellman, S. E. Dreyfus: Programowanie dynamiczne (Zastosowanie). PWE, Warszawa 1967.*

stadium może być np. przejście do rozpatrywania nowego wariantu rozwiązania lub wprowadzenie do rachunku następnej zmiennej itp.

Metody dynamiczne, wykorzystujące równania rekurencyjne, nadają się do rozwiązywania zadań zmierzających np. do ustalenia optymalnych grafik remontów urządzeń z uwagi na konieczność odpowiedniego rozłożenia ich w czasie.

Zakładając, że czytelnik zna przynajmniej teoretycznie metody programowania optymalizacyjnego, przystępujemy obecnie do prezentacji numerycznych rozwiązań przykładów z zakresu czterech uprzednio wymienionych klas modeli. W trakcie ich rozwiązywania będą wyjaśniane kolejne etapy stosowanych metod rachunku.

#### **4. PRZYKŁADY NUMERYCZNEGO ROZWIĄZANIA ZADAŃ OPTYMALIZACYJNYCH**

Zaraz na początku musimy wyjaśnić, że ponieważ wszystkie przykłady będą rozwiązywane ręcznie, tzn. bez użycia EMC, dla uniknięcia nadmiernej pracochłonności (która z reguły cechuje metody optymalizacyjne), ograniczymy się do rozpatrzenia prostych zadań o niedużej liczbie zmiennych. Należy także zauważyć, że specyfika łączności nie pozwala na bezpośrednie wykorzystanie doświadczeń innych gałęzi gospodarki narodowej, jeśli idzie o zastosowanie metod matematycznych. Po dokonaniu niezbędnej adaptacji, istnieje natomiast możliwość wykorzystania tych metod również dla potrzeb in.teresującej nas dziedziny.

##### **4.1. Przegląd metod optymalizacyjnych nadających się do zastosowania w dziedzinie łączności pocztowej i telekomunikacyjnej**

Na wstępie pragniemy zaznaczyć, że nasze rozważania przeprowadzimy przede wszystkim pod kątem możliwości zastosowania w rachunku ekonomicznym łączności znanych metod programowania liniowego, z których należy wymienić: metody z zakresu teorii grafów, prostą metodę graficzną (dla zadań z dwoma zmiennymi), algorytm transportowy (inaczej metodę przydziału), metodę simpleks czy węgierską. Ponadto zostanie omówione, na przykładach ogólnych, zastosowanie metod programowania dynamicznego.

##### **4.1.1. Wykorzystanie metod matematycznych przy tworzeniu systemu organizacji łączności**

Wybór systemu organizacji terenowej łączności, zarówno telekomunikacyjnej jak i pocztowej, wewnątrz poszczególnych ośrodków miejskich

i wiejskich lub na większych obszarach aglomeracji ludzkich jest zawsze zadaniem o dużym znaczeniu. Jego rozwiązanie sprowadza się do określenia liczby jednostek organizacyjnych łączności (placówek pocztowych, pocztowo-telekomunikacyjnych itp.), miejsc ich rozmieszczenia, wielkości ich mocy usługowych, zaplecza transportowego itp. Od stopnia, w jakim dany system organizacji służby łączności spełnia warunek optymalności zależy w znacznej mierze efekt pracy łączności ujranej jako całość.

Z zadań wiążących się z problematyką organizacji i zarządzania, a dających się rozwiązać za pomocą metod optymalizacji można wymienić problem optymalnego ustalenia schematu rozmieszczenia placówek pocztowo-telekomunikacyjnych, węzłów radiofonicznych, central telefonicznych oraz optymalnej organizacji sieci transportu pocztowego czy określonych fragmentów sieci telekomunikacyjnej.

#### **4.1.2. Organizacja i mechanizacja procesów produkcyjnych w węzłach pocztowych**

Jedną ze specyficznych cech łączności pocztowej jest nierównomierność przepływu obciążenia. Przy ustalonych terminach opracowywania przesyłek pocztowych, nierównomierność ta komplikuje w dużym stopniu organizację pracy i wymaga stworzenia odpowiednich rezerw mocy produkcyjnych w postaci środków osobowych i rzeczowych.

Wahania obciążenia mają charakter okresowy. Ulegają one zmianom z godziny na godzinę (wahania dobowe), z dnia na dzień (wahania tygodniowe), z miesiąca na miesiąc. Biorąc za punkt odniesienia szczytowe obciążenie placówek pocztowo-telekomunikacyjnych musielibyśmy się liczyć z nieuchronnymi stratami czasu roboczego, materiałów i środków pieniężnych na skutek przestoju urzędów w okresach spadku obciążeń. Pierwszym zatem problemem jest ustalenie sposobu zminimalizowania kosztów zapewnienia niezbędnych przepustowości placówek pocztowo-telekomunikacyjnych.

Z innych problemów należy wymienić przykładowo zadanie określenia optymalnego poziomu mechanizacji prac, właściwego przydziału stanowisk pracy, ustalenia odpowiedniej liczby stanowisk roboczych przy pracach związanych z oczekiwaniem na przybycie klienta (problem ustalenia optymalnej liczby czynnych okienek pocztowych) itp.

Do podstawowych problemów w placówkach pocztowych należy ustalenie liczebności pracowników niezbędnych przy opracowywaniu napływającej masy przesyłek pocztowych oraz rozdziału siły roboczej w czasie, z uwzględnieniem wszelkich możliwych wahań obciążenia. Ponieważ roz-



wiązanie podobnego problemu zostało już przedstawione w literaturze fachowej łączności <sup>1)</sup>, dlatego ograniczymy się tu tylko do krótkiego omówienia poszczególnych jego etapów.

W pierwszym etapie rozwiązywania problemu należy ustalić liczebność personelu badanej placówki w przekroju godzinowym, uwzględniając rozkład wahań dobowych. W tym celu wykorzystujemy model z układem 24 zależności bilansowych określanych przez niezbędne limity zatrudnienia dla każdej godziny doby, zakładając, że praca trwa nieprzerwanie przez całą dobę. Liczba zmiennych decyzyjnych w modelu zależy oczywiście od długości zmian (np. przy 8-godzinnym dniu pracy będą 42 zmienne). Każda z nich określa liczbę pracowników rozpoczynających pracę w pewnej *i*-tej godzinie doby i pozostających w pracy w *j*-tej godzinie. Funkcja-kryterium minimalizuje nakłady czasu roboczego.

Rozwiązanie prowadzi do ustalenia takiego harmonogramu zmian, przy którym całość napływającej w ciągu doby masy pocztowej zostanie opracowana w ustalonych terminach przy minimalnych nakładach czasu pracy.

W drugim etapie staramy się określić liczebność pracowników z uwagi na tygodniowe wahania obciążenia. Należy wówczas określić optymalny rozkład personelu z uwzględnieniem nieuniknionych strat czasu pracy na skutek łącznego wpływu wahań dobowych i tygodniowych obciążenia. Model będzie zawierał siedem nierówności liniowych.

Trzeci etap sprowadza się wreszcie do ustalenia optymalnego rozkładu urlopów pracowniczych oraz liczebności pracowników w przekroju poszczególnych miesięcy roku z równoczesnym uwzględnieniem strat wynikających z wahań dobowych, tygodniowych i miesięcznych. Model zawierałby w takim wypadku 12 nierówności liniowych.

#### 4.1.3. Procesy transportowe łączności

W bieżących kosztach placówek pocztowo-telekomunikacyjnych duży udział mają koszty transportu przesyłek, co wpływa ujemnie na poziom rentowności tych placówek. Zmniejszenie kosztów przewozu można osiągnąć przez optymalny wybór rodzaju środków transportu, tras przejazdowych oraz efektywne wykorzystanie dysponowanych mocy przewozowych (np. drogą minimalizacji tzw. pustych przebiegów). Przy optymalizacji tych procesów i zagadnień za dane wyjściowe przyjmujemy wielkość strumieni przesyłek pocztowych oraz techniczno-eksploatacyjne wskaźniki poszczególnych środków transportu łączności.

<sup>1)</sup> Zb. *Dudziński*: Zagadnienie optymalnego rozkładu zmian personelu w warunkach nierównomiernego natężenia pracy. *Problemy Łączności IŁ* nr 30/1968. Metoda rozwiązania — algorytm simpleks.

Należy podkreślić, że bardzo pomocne w ustaleniu optymalnych tras przewozowych są metody z zakresu teorii grafów, które zostaną przedstawione w dalszej części artykułu. Zauważmy również, że z podobną problematyką optymalizacyjną spotykamy się przy okazji prób ustalenia optymalnych połączeń w ramach sieci telekomunikacyjnych.

#### 4.1.4. Organizacja służby doręczycielskiej

Doręczanie przesyłek pocztowych oraz prasy jest najbardziej pracochłonną częścią procesu produkcyjnego poczty. Ponieważ w wielkich ośrodkach jest ono zdecentralizowane, dlatego powstaje możliwość ustalenia optymalnej liczby urzędów doręczycielskich, ich rozmieszczenia itp.

Wzrost liczby placówek doręczycielskich zmniejszy co prawda rejon doręczania, obsługiwany przez jeden urząd, a tym samym (na skutek skrócenia tras) ulegną liczebnemu zmniejszeniu jałowe marszruty i objazdy doręczycielskie między urzędem a rejonem doręczania, z drugiej jednak strony prowadzi to do wzrostu nakładów inwestycyjnych i eksploatacyjnych (na skutek tworzenia nowych urzędów). Należy zatem określić optymalną liczbę placówek, przy której łączna suma kosztów doręczania, przy zachowaniu planowej częstotliwości, będzie najniższa.

Czas pracy doręczycieli zależy od ustalenia właściwej trasy i kolejności jej obchodu. Do rozwiązania tego zadania można z powodzeniem wykorzystać wspomniane już metody teorii grafów. Podobne zagadnienie w telekomunikacji polega na ustaleniu najtańszej (tzn. najkrótszej) sieci łączącej (zarówno otwartej, jak i zamkniętej) lub sieci o maksymalnej przepustowości strumienia ruchu telefonicznego czy telegraficznego.

Na zakończenie tego ogólnego przeglądu metod optymalizacyjnych możliwych do zastosowania w rozwiązywaniu zagadnień łączności, należy podkreślić, że omówione przykłady nie wyczerpują wszystkich możliwości w tym względzie, szczególnie jeżeli idzie o telekomunikację. Niemniej rozwiązane w dalszej części artykułu przykłady pozwolą na zorientowanie się w stopniu przydatności omawianych metod w łączności.

## 4.2. Przykłady zadań z zakresu programowania liniowego

### Przykład 1. Budowa optymalnej trasy zamkniętej dla służby doręczycielskiej

Przy organizowaniu doręczycielskiej służby pocztowej wykorzystujemy zarówno marszruty promieniste (gwiazdowe), jak i trasy zamknięte. Te ostatnie zapewniają z reguły lepszą efektywność wykorzystania środ-

ków doręczania (tzn. człowieka i środków transportu). Zadania nasze sformułujemy następująco: poczynawszy od pewnego punktu wyjściowego (urzędu, placówki pocztowo-telekomunikacyjnej) należy objechać dane  $n$  miejscowości ( $n$  adresatów) i wrócić z powrotem po zrealizowaniu doręczeń. Pragniemy wybrać najbardziej ekonomiczną (z uwagi na przykład na koszty transportu, czas realizacji pełnej obsługi trasy, długość trasy itp.) kolejność objazdu adresatów.

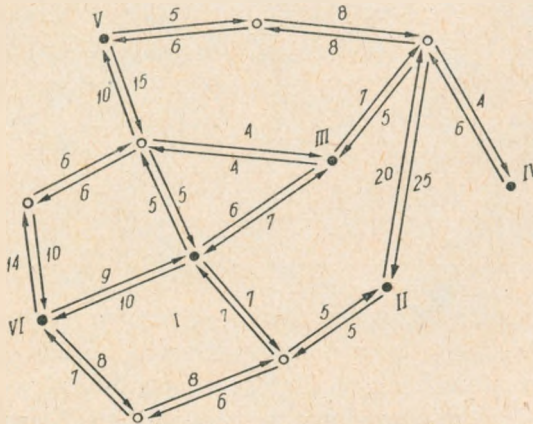
Jak można się łatwo zorientować, problem właściwego wyboru rozwiązania bardzo utrudnia duża liczba rozwiązań możliwych. Dla doręczenia przesyłek tylko 6 adresatom możemy np. wybrać aż 120 różnych wariantów trasy zamkniętej, co wynika z kombinatoryki:  $(n-1)! = 5! = 120$ . Dla 10 adresów mamy  $9!$  możliwości tras cyklicznych, tj. możliwych kolejności doręczania przesyłek.

Musimy zatem bezwzględnie wykluczyć możliwość rachunku za pomocą naturalnej metody „prób i błędów”, czyli drogą kolejnego obliczenia wszystkich możliwych wariantów. Z pomocą w tym przypadku przychodzą nam metody matematyczne, pozwalające w zgodzie z wybranym kryterium ustalić względnie szybko optymalny wariant trasy zamkniętej przy dowolnej liczbie punktów objazdu.

Dla rozwiązania przykładu numerycznego, polegającego na ustaleniu optymalnej kolejności doręczeń przy 6 adresach czy też punktach docelowych pod kątem minimalizacji czasu objazdu trasy, posłużymy się prostą pojęciowo metodą z zakresu teorii grafów — tzw. metodą gałęzi i granic.

### Dane wyjściowe przedstawia rys. 2

Czarne punkty ponumerowane cyframi rzymskimi od I do VI oznaczają adresatów (w tym także urząd doręczycielski), kółka białe oznaczają



Rys. 2. Graficzny obraz połączeń drogowych między poszczególnymi punktami trasy, z uwzględnieniem możliwych dojazdów



punkty przecięcia się dróg dojazdowych, zaś liczby nad poszczególnymi strzałkami oznaczają czasy przejazdu (np. w minutach) w kierunku oznaczonym przez zwrot strzałki i na danym odcinku drogi.

### Opis kolejnych etapów rozwiązania

Przed przystąpieniem do ustalenia trasy zamkniętej (przy czym zakładamy, że w każdym punkcie można zatrzymać się tylko jeden raz, co nie wyklucza możliwości kilkakrotnego nawet przejazdu przez ten punkt) należy ustalić najkrótsze drogi (w naszym przykładzie drogi o najkrótszym czasie przejazdu) między wszystkimi punktami, które mają utworzyć tę trasę. Zrobimy to za pomocą wykresów podanych na kolejnych rysunkach 3-8.

Na podstawie danych z rys. 3-8 tworzymy tabelkę wyników, a na jej podstawie z kolei określamy macierz kwadratową stopnia szóstego.

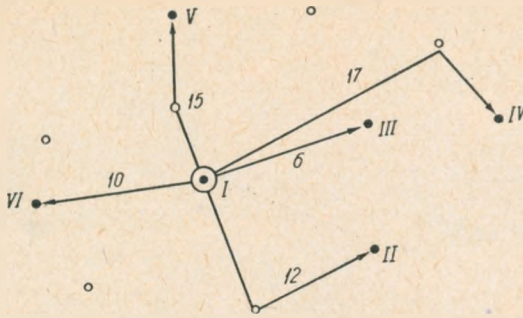
Tabela 1

Sumaryczne ujęcie szybkości wzajemnych połączeń punktów

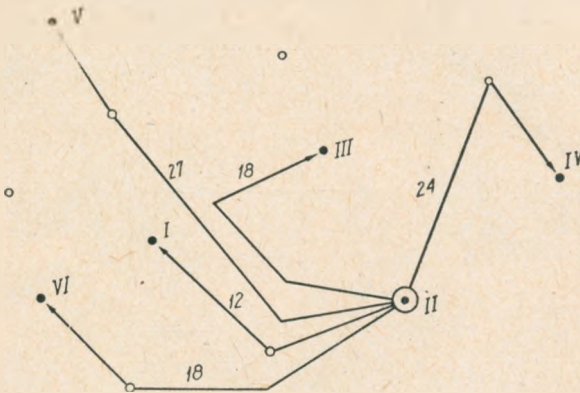
$P_i \backslash P_j$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
$P_1$		12	6	17	15	10
	$P_1$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	
$P_2$			18	24	27	18
	$P_1$	$P_2$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	
$P_3$		7		11	14	17
	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_5$	$P_6$	
$P_4$		18	30		20	28
	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	
$P_5$		20	32	18		30
	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	
$P_6$		9	21	15	26	

W lewej kolumnie tablicy wyników podano punkty wyjściowe możliwych odcinków  $P_i$  trasy, a w górnym wierszu punkty końcowe  $P_j$ -tych odcinków. Liczby w kratkach tablicy informują o możliwych minimalnych czasowo połączeniach między dowolnymi punktami  $P_i$  oraz  $P_j$ .

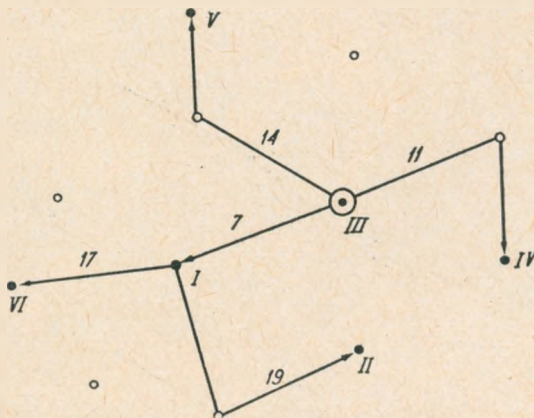
Macierz wyjściowa nie będzie oczywiście macierzą symetryczną, gdyż czasy przejazdu na poszczególnych odcinkach w obu relacjach różnią się.



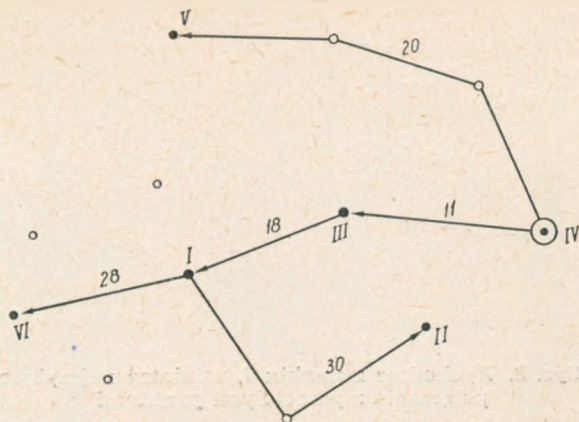
Rys. 3. Wychodząc z punktu I, ustalamy najszybsze połączenia z pozostałymi punktami



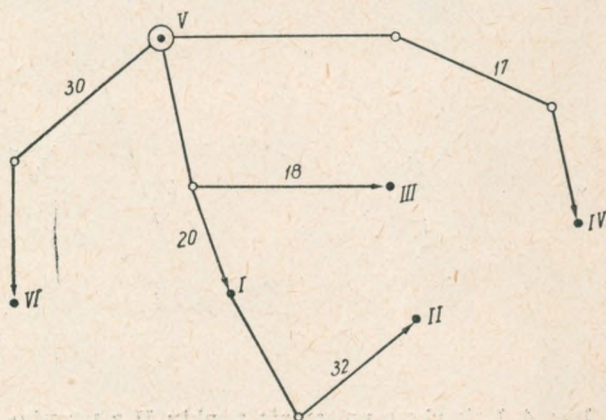
Rys. 4. Najszybsze połączenia punktu II z pozostałymi punktami



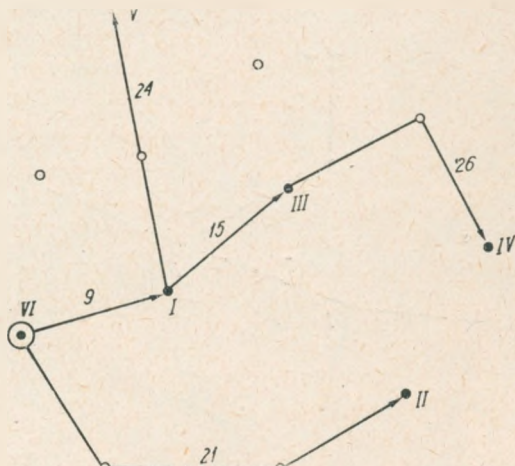
Rys. 5. Najszybsze połączenia punktu III z pozostałymi punktami



Rys. 6. Najszybsze połączenia punktu IV z innymi punktami



Rys. 7. Najszybsze połączenia punktu V z punktami pozostałymi



Rys. 8. Najszybsze połączenia punktu VI z pozostałymi punktami



Ponieważ analizowanie trasy między jednoimiennymi punktami (tzn. gdy  $i = j$ ) nie ma sensu, więc dla takich elementów macierzy ( $c_{ij}$ ) przyjmujemy wartość równą nieskończoności. Wartości te leżą na głównej przekątnej macierzy.

Pierwszy etap wyliczeń polega na przekształceniu tablicy metodą zbliżoną do węgierskiej<sup>1)</sup>.

Dla przekształcenia wierszy wyszukujemy w nich elementy minimum i odejmujemy je od pozostałych elementów w wierszach. W tym przypadku będą to następujące elementy:  $c_{13} = 6$ ,  $c_{21} = 12$ ,  $c_{31} = 7$ ,  $c_{43} = 11$ ,  $c_{54} = 17$  oraz  $c_{61} = 9$ .

W wyniku operacji odjęcia w wierszach elementów minimum otrzymujemy nową macierz, którą przedstawia tabl. 3.

Tablica 2

Macierz wyjściowa rozwiązania

$P_i \backslash P_j$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
$P_1$	$\infty$	12	6	12	15	10
$P_2$	12	$\infty$	18	24	27	18
$P_3$	7	19	$\infty$	11	14	17
$P_4$	18	30	11	$\infty$	20	28
$P_5$	20	32	18	17	$\infty$	30
$P_6$	9	21	15	26	24	$\infty$

Tablica 3

Zredukowana macierz  
wyników

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
$P_1$	$\infty$	6	0	11	9	4
$P_2$	0	$\infty$	6	12	15	6
$P_3$	0	12	$\infty$	4	7	10
$P_4$	7	19	0	$\infty$	9	17
$P_5$	3	15	1	0	$\infty$	13
$P_6$	0	12	6	17	15	$\infty$

W każdym wierszu macierzy otrzymaliśmy przynajmniej jedno zero, lecz brak ich w kilku kolumnach. W tym celu tworzymy kolejną macierz zredukowaną, odejmując od każdej z kolumn jej element minimum (dotyczy to wyłącznie kolumn nie zawierających jeszcze zer). Stąd  $c_{12} = 6$ ,  $c_{35} = 7$  i  $c_{16} = 4$ . Wyniki przekształceń zawiera tabl. 4.

W nawiasach podano tzw. wartości  $Q$  przekształcenia, wyjaśnione w dalszym ciągu opisu rozwiązania.

Suma stałych przekształcenia (wierszowych i kolumnowych elementów minimum) wynosi ostatecznie 79 ( $(6 + 12 + 7 + 11 + 17 + 9) + (6 + 7 + 4)$ ). Jest to tzw. dolna granica wszystkich cykli. Oznacza to, że dowolny wariant trasy zamkniętej (cykl) nie może być krótszy (czasowo) od wartości 79. Wartość ta odpowiada wyjściowemu punktowi rozgałęzienia (pierwszemu wierzchołkowi grafu-drzewka — inaczej dendrytu) obejmującemu wszystkie możliwe cykle.

<sup>1)</sup> Metodę tę omawiamy dokładnie w dalszej części pracy przy okazji numerycznego rozwiązywania przykładów 8 i 9.

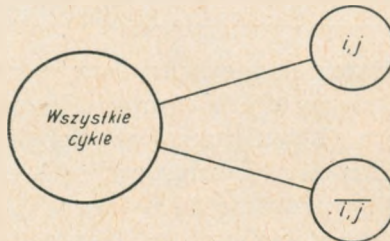
Wykorzystując rozgałęzienia dendrytu, szukamy optymalnego wariantu trasy zamkniętej. Z góry można przy tym zrezygnować z większości możliwych rozwiązań, jako wyraźnie nieoptymalnych. Niżej podano opis kolejnych kroków rozwiązania grafu.

Tablica 4

Kolejne przekształcenie macierzy  
(odjęcie kolumnowych elementów minimum)

$P_i \backslash P_j$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
$P_1$	$\infty$	$0^{(6)}$	$0^{(6)}$	11	2	$0^{(2)}$
$P_2$	$0^{(2)}$	$\infty$	6	12	8	2
$P_3$	$0^{(6)}$	6	$\infty$	4	0	6
$P_4$	7	13	$0^{(2)}$	$\infty$	2	13
$P_5$	3	9	1	$0^{(6)}$	$\infty$	9
$P_6$	$0^{(6)}$	6	6	17	8	$\infty$

Na pierwszym etapie rozwiązania, zbiór wszystkich możliwych cykli rozbijamy na dwa podzbiory: pierwszy zawiera cykle uwzględniające przejazd z pewnego punktu  $P_i$  do innego punktu  $P_j$  (regulę określania takiej trasy podamy dalej), a drugi podzbiór nie zawiera cykli z takim przejaz-



Rys. 9. Pierwsze rozgałęzienie dendrytu

dem. Odpowiednio zatem z wyjściowego wierzchołka dendrytu, który nazwiemy „wszystkie cykle”, wyprowadzamy dwa rozgałęzienia: jedno prowadzi do wierzchołka „i, j” wyobrażającego pierwszy podzbiór, drugie zaś do wierzchołka „i, j”, oznaczającego podzbiór drugi.

W podobny sposób konstruujemy następne pary rozgałęzień. Proces ten trwa do momentu, w którym jesteśmy w stanie ustalić (tj. odczytać z grafu) pełną trasę objazdu, a ponadto stwierdzić, że dalsze przedłużanie grafu prowadzi do rozwiązań suboptymalnych.

Każdy kolejny wierzchołek dendrytu ma własną dolną granicę, okreś-

loną za pomocą sumy stałych przekształcenia właściwej mu macierzy wyjściowej. Ścisłą regułą ustalania tych granic podamy po uprzednim wyjaśnieniu sposobu wyboru par wierzchołków  $(i, j)$  oraz  $(i, \bar{j})$ .

Para punktów  $(P_i, P_j)$  jest wybierana na podstawie wspomnianych już uprzednio wartości  $Q$ , które wyliczymy dla wszystkich klatek macierzy przekształconej przedstawionej w tabl. 4.

Dla określenia wartości  $Q(k, l)$ , w wierszu  $k$  wybierzemy element minimum (poza pierwszym zerem) oraz podobny element w kolumnie. Ich suma daje nam szukaną wartość  $Q$ . (Np.  $Q(1, 2) = 0 + 6 = 6$ ,  $Q(1, 3) = 0 + 0 = 0$ ,  $Q(5, 4) = 1 + 4 = 5$  itd.). Elementy te zanotowaliśmy w tabl. 4 w odpowiednich klatkach, w nawiasach. Maksymalna wartość  $Q$  wynosi 6 i znajduje się w 2 klatkach. Wybieramy np. element  $(1, 2)$ , wykreślając równocześnie z macierzy pierwszy wiersz i drugą kolumnę. Znaleźliśmy wierzchołek „1, 2”, zawierający wszystkie cykle z parą punktów  $P_1$  i  $P_2$ . Wierzchołek „1, 2” nie powinien zawierać z kolei cykli z taką parą. Wierzchołkowi temu przypisana jest macierz podana niżej w tabl. 5, która różni się od macierzy wyjściowej tym, że dla elementu  $c_{12}$  przyjmuje wartość  $\infty$ . Zapewnia to w sposób formalny niewłączenie cyklu  $(1, 2)$  do podzbioru „1, 2”.

Tablica 5

Macierz wyjściowa dla podzbioru „1, 2”

$P_i \backslash P_j$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
$P_1$	$\infty$	$\infty$	6	17	15	10
$P_2$	12	$\infty$	18	24	27	18
$P_3$	7	19	$\infty$	11	14	17
$P_4$	18	30	11	$\infty$	20	28
$P_5$	20	32	18	17	$\infty$	30
$P_6$	9	21	15	26	24	$\infty$

Wartość dolnej granicy wierzchołka „1, 2” równa jest sumie dolnej granicy poprzedzającego wierzchołka w grafie (w tym wypadku jest to wierzchołek „wszystkie cykle”) oraz wartości  $Q(1, 2) = 6$ , czyli wynosi ostatecznie  $h = 85$ .

Dla określenia dolnej granicy wierzchołka „1, 2”, do liczby 79 dodajemy sumę stałych przekształcenia elementów macierzy z tabl. 4, po skreśleniu z niej elementów 1. wiersza i 2. kolumny. Ponieważ cykl „1, 2” wyłącza w tym zbiorze wariantów cykl „2, 1”, zatem element  $c_{21}$  macierzy przekształconej  $= \infty$ , co podano w kolejnej tabl. 6.



Jak można zauważyć, w macierzy wykonano operację  $c_{2j} - 2$ . Była ona niezbędna, gdyż jedynie drugi wiersz nie zawierał zera; w związku z tym od elementów tego wiersza odjęto jego stałą przekształcenia (ele-

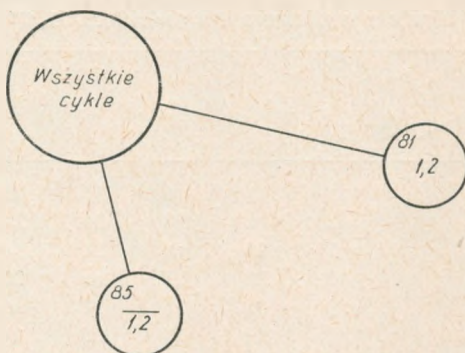
Tablica 6

Kolejne przekształcenie macierzy wyników

$P_i \backslash P_j$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
$P_1$	x x x x x x x x x x x x x x x x x x	x x x x x x x x x x x x x x x x x x				
$P_2$	$\infty$	x x	64	1210	86	20
$P_3$	0	x x	$\infty$	4	0	6
$P_4$	7	x x	0	$\infty$	2	13
$P_5$	3	x x	1	0	$\infty$	9
$P_6$	0	x x	6	17	8	$\infty$

ment minimum) równą 2. Suma wartości stałych przekształcenia wyniesie teraz 2, a zatem dolna granica wierzchołka „1, 2” równa się  $79 + 2 = 81$ .

W ten sposób określiliśmy pierwsze dwa wierzchołki dendrytu, co przedstawia kolejny rys. 10.



Rys. 10. Drugie rozgałęzienie dendrytu

Aby otrzymać następne pary rozgałęzień z wierzchołka „1, 2”, określamy znów wartości  $Q$ , wybierając kolejną parę punktów wchodzących do marszruty zamkniętej. Obliczenia zawarte są w tabl. 7-10.

Otrzymujemy w ten sposób dane dla rysunku 11.

Ostatecznie trasa zamknięta powinna przebiegać kolejno przez następujące punkty: 1-2-6-5-4-3-1. Minimalny, z uwagi na warunki czasu przejazdu tej trasy jest rzeczywiście równy 89 minutom, co można sprawdzić wykorzystując dane zawarte w tablicy wyjściowej.

Tablica 7

## Przekształcenie macierzy z tabl. 6

$P_i \backslash P_j$	$P_1$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
$P_2$	<del>∞</del>	4	10	6	$0^{(10)}$
$P_3$	$0^{(6)}$	∞	4	$0^{(2)}$	6
$P_4$	7	$0^{(3)}$	∞	2	13
$P_5$	3	1	0	∞	9
$P_6$	$0^{(6)}$	6	17	8	∞

Opis przekształceń:

- 1)  $Q_{max} = 10$ ; wykreślamy 2. wiersz i 6. kolumnę
- 2) w klatkę (6,6) wpisujemy znak  $\infty$
- 3) kolejne ogniwo cyklu tworzą punkty  $P_2$  i  $P_6$
- 4) przekształcamy z kolei macierz czwartego stopnia, otrzymując następną wierzchołki grafu

Tablica 8

## Kolejne przekształcenie macierzy z tabl. 7

	$P_1$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$P_3$	$0^{(3)}$	∞	4	$0^{(2)}$
$P_4$	7	$0^{(2)}$	∞	2
$P_5$	<del>3</del>	1	$0^{(5)}$	<del>∞</del>
$P_6$	∞	$60^{(2)}$	17	8

- 1) odejmujemy element minimum = 6 od ostatniego wiersza, otrzymując w nim jedno przynajmniej zero,
- 2)  $Q_{max} = 5$ , wykreślamy 5. wiersz i 4. kolumnę; klatka (4,5) przyjmuje wartość  $\infty$ ,
- 3) kolejnym ogniwem cyklu jest wierzchołek „5,4”.

Tablica 9

## Przekształcenie macierzy 3 stopnia

	$P_1$	$P_3$	$P_5$
$P_3$	$0^{(2)}$	<del>∞</del>	$0^{(2)}$
$P_4$	7	$0^{(7)}$	∞
$P_6$	∞	$0^{(2)}$	2

Opis przekształcenia:

- 1) każdy wiersz oraz kolumna zawierają zero,
- 2)  $Q_{max} = 7$ , skreślamy 3. wiersz i 1. kolumnę; do klatki (6,3) wpisujemy znak  $\infty$ ,
- 3) kolejnym ogniwem okazał się wierzchołek „3,1”.

Tablica 10

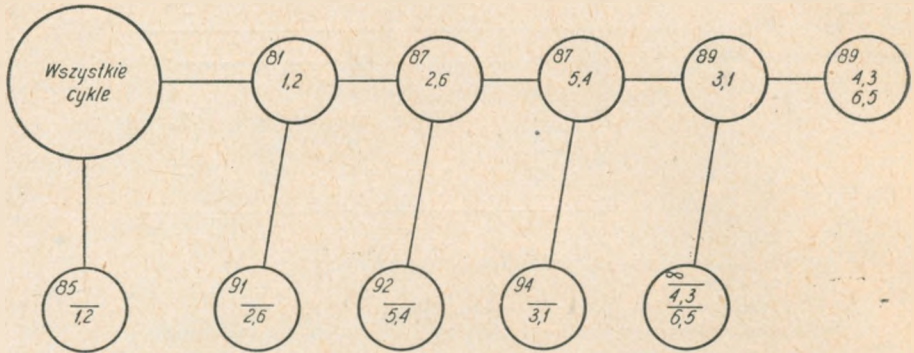
## Przekształcenie macierzy stopnia drugiego

	$P_3$	$P_5$
$P_4$	$0^{(\infty)}$	0
$P_6$	∞	$20^{(\infty)}$

Opis przekształcenia:

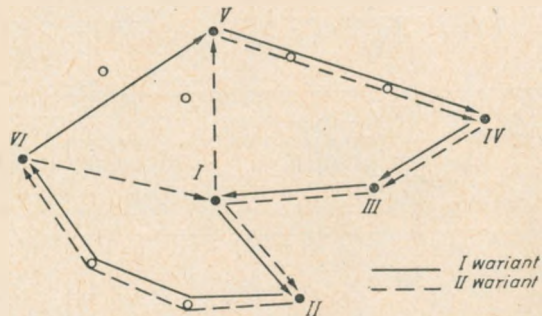
- 1) odejmujemy od 5. kolumny element minimum 2; każdy wiersz i każda kolumna zawierają zero,
- 2)  $Q_{max} = \infty$ . Określone są dwie pary równoległych punktów: (4,3) oraz (6,5).

Aby upewnić się ponadto, że ustalona trasa jest optymalną, należy rozwiązać rozgałęzienie „1, 2”, gdyż dolna jego granica jest niższa od wartości 89 (tzn. wynosi 85). Po wykonaniu analogicznych obliczeń jak w od-



Rys. 11. Ostateczny obraz graficzny pierwszego rozgałęzienia grafu (tzn. z wierzchołka „1, 2”)

niesieniu do wierzchołka „1, 2”, otrzymamy inny wariant trasy zamkniętej, również optymalny, tzn. o tym samym czasokresie przejazdu (czyli 89 minut). Przebiega on kolejno przez następujące punkty: 1-5-4-3-2-6-1. Ostateczne rozwiązanie zadania podano na rys. 12.



Rys. 12. Optymalne warianty trasy zamkniętej

## Przykład 2. Zadanie na określenie najkrótszej sieci telekomunikacyjnej

Przy projektowaniu liniowych urządzeń sieci telekomunikacyjnej powstaje szereg złożonych problemów techniczno-ekonomicznych, związanych z potrzebą określenia minimalnej długości sieci. Wiąże się to z faktem, że założone wielkości przepływu informacji między poszczególnymi węzłami sieci (przy ustalonym poziomie jakości przekazu oraz niezawodności połączeń) można przekazywać różnymi drogami.

Wielkość nakładów inwestycyjnych na budowę urządzeń liniowych



oraz koszty ich eksploatacji są w zasadniczym stopniu funkcją długości kanałów telekomunikacyjnych. Im mniejsza jest ich długość, tym mniejsze są nakłady inwestycyjne przeznaczone na ich budowę oraz tym niższe koszty związane z ich późniejszą eksploatacją.

Wzajemne powiązania węzłów w sieci możemy przedstawić w postaci symetrycznej macierzy kwadratowej, ponieważ odległości w obu relacjach połączeń dowolnych dwu punktów sieci są jednakowe.

Dla  $n$  punktów  $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$  otrzymujemy poniższą macierz (tabl. 11), w której elementy  $a_{ij} (i = 1, 2, \dots, n)$  oznaczają odległości między poszczególnymi węzłami sieci  $A_i, A_j$ :

Tablica 11  
Kwadratowa macierz połączeń węzłów sieci  
telekomunikacyjnej

$A_i \backslash A_j$	$A_1$	$A_2$	...	...	$A_n$
$A_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	...	...	$a_{1n}$
$A_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	...	...	$a_{2n}$
.	.	.	...	...	.
.	.	.	...	...	.
.	.	.	...	...	.
$A_n$	$a_{n1}$	$a_{n2}$	...	...	$a_{nn}$

Chcemy zminimalizować łączną długość całej sieci, która musi spełniać jednak następujący warunek: dla każdego punktu sieci istnieje droga łącząca go z każdym z punktów pozostałych.

Przed przystąpieniem do rachunku podamy szereg pojęć wyjaśniających:

1) punkty nie mające połączeń z innymi punktami nazwiemy odosobnionymi;

2) kilka punktów połączonych ze sobą nazywać będziemy fragmentem sieci, przy czym odległością punktu od fragmentu jest jego minimalna odległość od dowolnego punktu należącego do fragmentu;

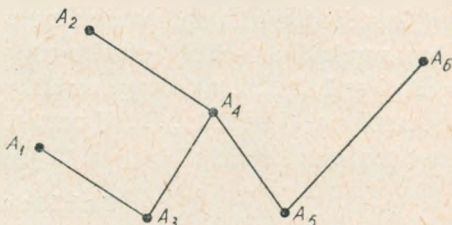
3) zakładamy ponadto, że budowa sieci przebiega następująco:

— każdy punkt łączy się za pomocą łuku z najbliższym punktem lub fragmentem,

— każdy fragment łączy się z najbliższym punktem lub fragmentem,

— sieć jest skonstruowana w momencie, gdy wszystkie jej punkty mają połączenia.

Łatwo można zauważyć, że tego rodzaju zadania wynikają np. przy okazji organizacji sieci radiofonicznej. W naszym przypadku rozwiązaliśmy przykład zaprojektowania takiej sieci dla 6 osiedli, podanych na rys. 13, dla których zestawiamy odpowiednią macierz w tabl. 12.



Rys. 13. Optymalny schemat sieci radiofonicznej uzyskany w wyniku przeprowadzenia niżej opisanych kroków rachunkowych

Ponieważ jest to macierz symetryczna, dlatego dla celów rachunkowych wykorzystamy górną lub dolną część tablicy. Z jej elementów wybierzemy element minimum, tu  $a_{43} = 4$ . Na rysunku punkty  $A_4$  i  $A_3$  łączymy łukiem. Z pozostałych elementów niewydzielonych wybieramy znów element najmniejszy. Jest to element  $a_{54}$ . Punkty  $A_5$  i  $A_4$  na rys. 13 łączymy. Otrzymaliśmy fragment  $A_3A_4A_5$ . Bezpośrednie połączenie punktów  $A_3$  i  $A_5$  jest zbędne. Zatem element  $a_{53}$  skreślamy (jako większy wartość-

Tablica 12

Macierz odległości między poszczególnymi punktami (w km)

$A_i \backslash A_j$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$
$A_1$	×	16	13	16	23	32
$A_2$	<del>16</del>	×	14	10	20	20
$A_3$	<del>13</del>	<del>14</del>	×	4	9	19
$A_4$	<del>16</del>	<del>10</del>	<del>4</del>	×	8	16
$A_5$	<del>23</del>	<del>20</del>	<del>9</del>	<del>8</del>	×	15
$A_6$	<del>32</del>	<del>20</del>	<del>19</del>	<del>16</del>	<del>15</del>	×

ciowo od elementów minimalnych). Kolejnym elementem minimum z dotąd niewydzielonych jest  $a_{42} = 10$ . Punkty  $A_4$  i  $A_2$  łączymy łukiem, natomiast w tabl. 12 skreślamy elementy  $a_{32}$  i  $a_{52}$  (połączenia bezpośrednie w tej relacji są zbędne). Przy kolejnym minimalnym elemencie  $a_{31}$  skreślamy elementy  $a_{21}$ ,  $a_{41}$ ,  $a_{51}$  jako nieopłacalne. Na rysunku 13 natomiast

łączymy punkty  $A_3$  i  $A_1$ . Punkty  $A_5$  i  $A_6$  (element  $a_{65} = 15$ ) łączymy także bezpośrednio, natomiast skreślamy ostatecznie pozostałe elementy macierzy, jako nieefektywne. Otrzymaliśmy graficzny obraz rozwiązania optymalnego. Łączna długość sieci równa jest sumie elementów wydzielonych (w prostokątach) i jest najniższą z możliwych do osiągnięcia przy zadanych warunkach:

$$Z = a_{31} + a_{42} + a_{43} + a_{54} + a_{65} = 13 + 10 + 4 + 8 + 15 = 50 \text{ km}$$

Jak widać z przykładu, wykorzystaliśmy bardzo prostą, nieledwie mechaniczną metodę rachunku. Wymaga ona jedynie informacji o wzajemnych odległościach między interesującymi nas punktami przyszłej sieci.

### **Przykład 3. Rozwiązanie zagadnienia określenia optymalnej przepustowości urządzeń liniowych telekomunikacji**

Nierównomierność napływu obciążenia w czasie stwarza problem właściwego ustawienia mocy usługowych przedsiębiorstw łączności. W warunkach ostrego przyrostu obciążenia w tzw. okresach szczytu (np. dni świąteczne lub okres urlopowy) często powstaje problem określenia maksymalnie możliwej przepustowości już istniejących urządzeń liniowych (np. sieci telefonicznej międzymiastowej) bez specjalnego pogorszenia wskaźników jakościowych przekazu informacji.

Z pomocą w rozwiązaniu tego problemu przychodzą nam metody optymalizacyjne.

Sieć telekomunikacyjną można w szeregu przypadków przedstawić w postaci kolejno następujących po sobie odcinków, posiadających odpowiednio złożoną własną strukturę wewnętrzną. W ramach tych odcinków można znaleźć kilka wariantów trasowych przekazu informacji. Zadanie sprowadzałoby się zatem do ustalenia takiego schematu przekazu, w którym przy nienaruszonych połączeniach wewnętrznych odcinka zostanie zapewniona możność maksymalnego przechodzenia przez ten odcinek informacji zewnętrznej.

Podobny problem stoi przed transportem pocztowym, który korzysta z magistrał i dróg o zróżnicowanej przepustowości.

Zadania tego typu można rozwiązać, wykorzystując ogólny algorytm sympleks. Z uwagi na dużą pracochłonność związaną ze stroną rachunkową przy jego wykorzystaniu, w niniejszym przykładzie posłużymy się zamiennie dużo prostszą rachunkowo i mniej pracochłonną metodą z zakresu teorii grafów.

Jak zwykle, posłużymy się przykładem sieci, w skład której wchodzi 6 węzłów ( $P_1, P_2, \dots, P_6$ ). Wzajemne powiązania tych węzłów, wyrażające



się w zdolnościach przepustowych łączy na jednostkę czasu w obydwu relacjach, zobrazujemy za pomocą macierzy kwadratowej stopnia szóstego (tabl. 13), a schemat połączeń przedstawimy na rys. 14.

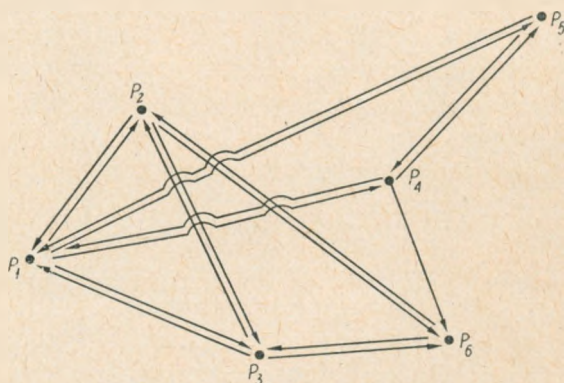
Tablica 13  
Macierz przepustowości między poszczególnymi węzłami sieci

$P_i \backslash P_j$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
$P_1$		3 <sup>-</sup>	4	3	2	
$P_2$	2 <sup>+</sup>		3			2 <sup>-</sup>
$P_3$	3	2				3
$P_4$	3				1	4
$P_5$	5			1		
$P_6$		3 <sup>+</sup>	3	0		

Objasnienia:  
 $a_{ij}$  oznacza zdolność przepustową między węzłami  $P_i$  i  $P_j$ , wyrażoną np. w ilości rozmów na minutę,  
 $a_{ji}$  oznacza zdolność przepustową między tymi węzłami w odwrotnej relacji, gdy  $a_{ij} > 0$  oraz  $a_{ji} = 0$ , to w klatce  $a_{ji}$  piszemy zero, natomiast gdy obydwie elementy równe są zero, klatek tych nie wypełniamy.

Na podstawie tego schematu wybieramy dowolną drogę połączenia między węzłami  $P_1$  i  $P_6$ , np. drogę  $P_1P_2P_6$ .

Elementy macierzy przepustowości (tabl. 13)  $a_{12}$  oraz  $a_{26}$  oznaczmy



Rys. 14. Schemat połączeń między węzłami

znakiem „-”, a elementy relacji odwrotnej „+”. Obliczamy zdolność przepustową wybranej trasy  $S_1$ . Jest oczywiste, że

$$S = \min[a_{12}, a_{26}] = \min[3; 2] = 2.$$

Odejmując wartość  $S_1$  od obydwu wyrażeń  $a_{12}$ ,  $a_{26}$  oraz dodając ją do obydwu elementów relacji odwrotnej, tzn.  $a_{21}$  i  $a_{62}$ , otrzymujemy pierwsze przekształcenie macierzy wyjściowej:

Wybieramy kolejny wariant połączenia punktów  $P_1$  i  $P_6$ , dokonując tych samych kroków rachunkowych jak poprzednio. Dla drogi połączeniowej  $P_1P_3P_6$  mamy:

$$S_2 = \min[a_{13}; a_{36}] = \min[4; 3] = 3$$

oraz kolejne przekształcenie macierzy:

Tablica 14

Pierwszy etap przekształcenia macierzy wyjściowej

$P_i \backslash P_j$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
$P_1$						
$P_2$		1	4 <sup>-</sup>	3	2	
$P_3$	4		3			0
$P_4$	3 <sup>+</sup>					3 <sup>-</sup>
$P_5$	3				1	4
$P_6$	5			1		
		5	3 <sup>+</sup>	0		

Tablica 15

Drugi etap przekształcenia macierzy

$P_i \backslash P_j$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
$P_1$						
$P_2$		1	1	3 <sup>-</sup>	2	
$P_3$	4		3			0
$P_4$	5					0
$P_5$	3 <sup>+</sup>				1	4 <sup>-</sup>
$P_6$	5			1		
		5	6	0 <sup>+</sup>		

Tworząc następny wariant połączenia  $P_1$  z  $P_6$  —  $P_1P_4P_6$ , otrzymujemy:

$$S_3 = \min[a_{14}; a_{46}] = \min[3; 4] = 3$$

oraz tablicę przekształconą:

Tablica 16

Trzeci etap przekształcenia macierzy

$P_i \backslash P_j$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
$P_1$						
$P_2$		1	1	0	2 <sup>-</sup>	
$P_3$	4		3			0
$P_4$	5					0
$P_5$	6				1 <sup>+</sup>	1 <sup>-</sup>
$P_6$	5 <sup>+</sup>			1 <sup>-</sup>		
		5	6	3 <sup>+</sup>		

Tablica 17

Czwarty etap przekształcenia macierzy

$P_i \backslash P_j$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
$P_1$						
$P_2$		1	1	0		
$P_3$	4		3			0
$P_4$	5					0
$P_5$	6					2
$P_6$	6			0		0
		5	6	4		

Kolejny etap liczenia:

$$S_4 = \min[a_{15}; a_{54}; a_{46}] = \min 2; 1; 1 = 1$$

dla trasy  $P_1P_5P_4P_6$ .

W kolumnie  $P_6$  otrzymaliśmy same zera. Oznacza to, że wyczerpaliliśmy wszystkie możliwe warianty połączeń między punktami  $P_1$  i  $P_6$ .

Odejmując od elementów macierzy pierwotnej elementy macierzy końcowej otrzymamy macierz wynikową zawierającą wartości  $s_{ij}$ , które określają maksymalnie możliwy strumień rozmów telefonicznych w danej sieci. W tablicy tej zapisujemy wyłącznie elementy większe od zera.

Tablica 18

Macierz wynikowa

$P_i \backslash P_j$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
$P_1$		2	3	3	1	
$P_2$						2
$P_3$		2				3
$P_4$						4
$P_5$				1		
$P_6$						

Ostatecznie więc maksymalny strumień przepływu informacji w sieci równy jest sumie wyrażen:

$$s_{12} + s_{13} + s_{14} + s_{15} = 2 + 3 + 3 + 1 = 9 \text{ (z wiersza } P_1)$$

lub

$$s_{26} + s_{36} + s_{46} = 2 + 3 + 4 = 9 \text{ (z kolumny } P_6).$$

Z powyższego wynika, że wielkość strumienia wychodzącego z węzła początkowego jest rzeczywiście równa wielkości strumienia wchodzącego do węzła końcowego.

Podobne rozważania można przeprowadzić dla dowolnej pary punktów  $P_i, P_j$  w sieci.

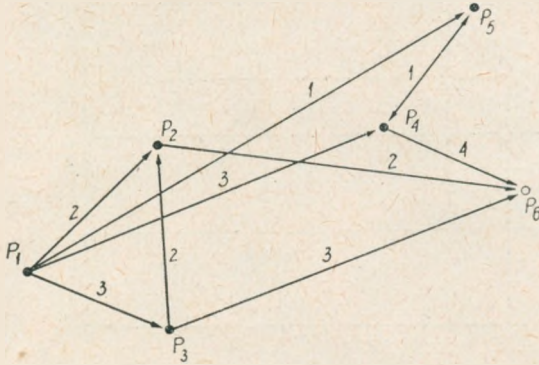
Na rysunku 15 przedstawiamy ostateczny schemat rozwiązania problemu.

#### Przykład 4. Wybór optymalnego schematu rozmieszczenia placówek łączności w ośrodku miejskim

W praktyce organizacji i planowania miejskiej sieci łączności pocztowej stoimy przed szeregiem złożonych problemów. Musimy m. in. odpo-



wiedzieć na pytania odnośnie liczby placówek pocztowo-telekomunikacyjnych, ich rozmieszczenia oraz sposobu organizacji transportu pocztowego z uwagi na konieczność uwzględnienia rozmieszczenia wszystkich najważniejszych urzędów i punktów miasta (lotnisk, dworców kolejowych, drukarni itp.), przez które przechodzi przeważająca część masy pocztowej.



Rys. 15. Schemat rozwiązania

Organizacja służby pocztowej jest w dużym stopniu zdeterminowana przez wielkość i ukształtowanie obszaru miejskiego, gęstość zaludnienia, rodzaj zabudowy (niska lub wysoka), rozkład linii komunikacji i transportu miejskiego.

W poniższym przykładzie pragniemy rozwiązać uproszczone zadanie omawianego typu.

Schemat wyjściowy:

W mieście istnieją dwa dworce kolejowe, jedno lotnisko oraz drukarnia. Znamy wzajemne odległości tych punktów. Wielkość strumieni masy pocztowej przechodzącej przez każdy z tych punktów odzwierciedlona jest w liczbie objazdów między tymi punktami a urzędami pocztowymi. Jeden z możliwych wariantów rozwiązania zagadnienia przedstawiono na rys. 16.

$s_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) — odległości poziome między poszczególnymi punktami miasta,

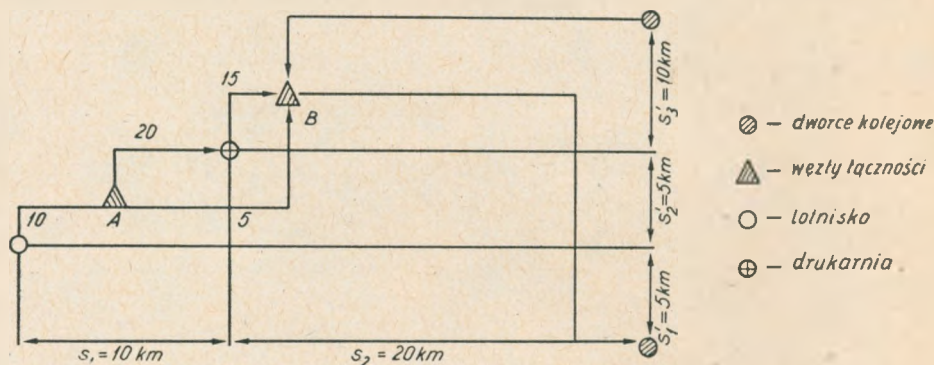
$\acute{s}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) — odległości w osi pionowej między tymi punktami.

Liczby nad strzałkami oznaczają liczbę dziennych objazdów.

Zadanie sprowadza się do takiego rozmieszczenia placówek pocztowo-telekomunikacyjnych, aby stojące przed nimi zadanie przekazu przesyłek pocztowych można było realizować przy minimalnym przebiegu transportu.

Długość każdej trasy będzie z założenia sumą odległości pionowych ( $y$ ) i poziomych ( $x$ ), gdy przyjmiemy dla uproszczenia, że układ dostępnych

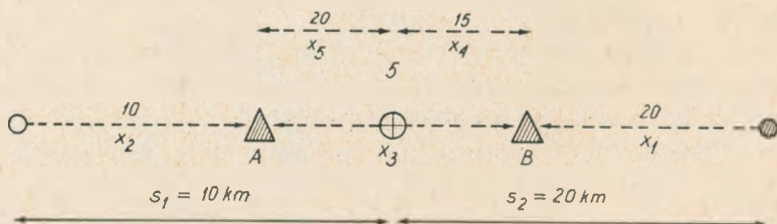
dla transportu dróg miejskich tworzy sieć prostokątną. Minimalizacja tych dwu rodzajów dróg dojazdowych prowadzi do minimalizacji przebiegu transportu. Zadanie można zatem rozwiązać w rozbięciu na dwie części: wybór optymalnego schematu organizacji łączności z uwagi na połączenia poziome oraz to samo dla przypadku połączeń pionowych.



Rys. 16. Schemat rozmieszczenia interesujących nas urządzeń i punktów miasta

### Rozwiązanie części I zadania

Niezależnie od położenia węzła  $B$ , suma odległości między dworcami kolejowymi a tym węzłem  $B(x_1)$  oraz między nim a drukarnią musi być równa lub większa od 20 km (jest to w osi poziomej dystans między dworcami a drukarnią).



Rys. 17. Graficzny obraz połączeń w osi poziomej

Zapiszemy to za pomocą następującej zależności:

$$x_1 + x_4 \geq 20$$

Na podstawie schematu zapisujemy analogicznie pozostałe zależności:

$$x_1 + x_3 \geq 20$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 30$$

$$x_2 + x_3 \geq 10$$

$$x_2 + x_3 + x_4 \geq 10$$

Przy powyższym układzie warunków bilansowych minimalizujemy następujący wielomian stopnia pierwszego:

$$Z = 20x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 15x_4 + 20x_5$$

Współczynniki liczbowe przy zmiennych oznaczają liczbę dobową objazdów na danym odcinku.

Zakładamy też, że  $x_i (i = 1, 2, \dots, 5) \geq 0$

Zmienne  $x_i$  modelu oznaczają odległości w następujących relacjach:

- $x_1$ : dworce kolejowe — węzeł B,
- $x_2$ : lotnisko — węzeł A,
- $x_3$ : węzeł A — węzeł B,
- $x_4$ : węzeł B — drukarnia,
- $x_5$ : węzeł A — drukarnia.

Powyższy przykład rozwiążemy za pomocą metody simpleks, wykorzystując tzw. skróconą tablicę simpleksową.

Na wstępie pierwotną postać układu nierówności bilansowych sprowadzamy do postaci dogodnej dla zapisu tabelarycznego.

Najpierw wprowadzamy zmienne dodatkowe, przekształcające nierówności na równania:

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 + x_2 + x_3 & & -x_6 & & & = 30 \\ x_1 & + x_3 & & -x_7 & & = 20 \\ x_1 & & + x_4 & & -x_8 & = 20 \\ & x_2 & + x_4 + x_5 & & -x_9 & = 10 \\ & x_2 & + x_5 & & -x_{10} & = 10 \end{array}$$

Następnie przekształcamy układ w ten sposób, aby utworzyć w nim macierz jednostkową ze współczynników przy pewnych zmiennych. Innymi słowy, każde równanie winno zawierać 1 zmienną ze współczynnikiem równym 1, która ponadto nie wystąpi w pozostałych równaniach układu (a raczej wystąpi tam ze współczynnikiem zero). Prawe strony równań muszą być przy tym nieujemne, aby można było utworzyć ze zmiennych bazowych (tzn. wchodzących do macierzy jednostkowej) rozwiązanie wyjściowe. Przekształcony w ten sposób układ prezentujemy poniżej:

$$\begin{array}{rcccccc} x_2 & & -x_6 + x_7 & & & = 10 \\ & x_3 & + x_1 - x_7 & & & = 20 \\ & & x_4 & + x_1 & - x_8 & = 20 \\ & & & x_5 & + x_6 - x_7 & - x_{10} = 0 \\ & & & & x_9 & + x_1 & - x_8 - x_{10} = 20 \end{array}$$



Wreszcie funkcję-kryterium (formę liniową) przekształcamy na postać maksymalizowaną (przez przemnożenie przez  $(-1)$ ):

$$Z' = -20x_1 - 10x_2 - 5x_3 - 15x_4 - 20x_5$$

W wyrażeniu tym zmienne bazowe  $x_2, x_3, x_4, x_5$  zastępujemy zmiennymi niebazowymi (prostą metodą podstawienia), otrzymując ostatecznie następującą postać liniową:

$$Z'' = -500 - (-10x_6 + 15x_7 + 15x_8 + 20x_{10})$$

Przystępujemy obecnie do rozwiązywania tabelarycznego, czyli do zbudowania wyjściowej skróconej tabeli sympleksowej oraz jej rozwiązania drogą kolejnych przekształceń (tabl. 19).

Tablica 19

**Rozwiązanie tabelaryczne problemu optymalizacyjnego**

I rozwiązanie	Zmienne bazy	Wyrazy wolne $P_0$	Zmienne niebazowe					
			$x_1$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_{10}$	
	$x_2$	10		-1	1			
	$x_3$	20	1		-1			
	$x_4$	20	1				-1	
	$x_5$	0		1	-1			-1
	$x_9$	20	1				-1	-1
$Z'_j - C_j$		-500	0	-10	15	15		20
II rozwiązanie			$x_1$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_{10}$	
	$x_2$	10	0	1	0	0		-1
	$x_3$	20	1	0	-1	0		0
	$x_4$	20	1	0	0	-1		0
	$x_6$	0	0	1	-1	0		-1
	$x_9$	20	1	0	0	-1		-1
$Z_j - C_j$		-500	0	10	5	15		10

Wyjaśnienie sposobu wypełnienia poszczególnych klatek tabeli:

W I rozwiązaniu (zmienne niebazowe przyjmą wartości zerowe):  $x_2 = 10, x_3 = 20, x_4 = 20, x_5 = 0, x_9 = 20$ . Wartości te wpisujemy do kolumny  $P_0$  (wyrazów wolnych). W wierszu „wynikowym” ( $Z'_j - C_j$ ) wpisujemy współczynniki występujące przy zmiennych niebazowych formy linio-

wej. Wartość wstępna funkcji-kryterium wyniesie  $-500$ . Występowanie elementów ujemnych na skrzyżowaniu wiersza wynikowego oraz kolumn zmiennych niebazowych oznacza, że poza bazą znajduje się przynajmniej jedna zmienna, którą należy wprowadzić do rozwiązania w celu poprawienia wyniku (wartości formy liniowej).

Objaśnienia przekształceń:

Sposób rugowania zmiennych z bazy:

Na wstępie znajdujemy minimalny wyraz (ujemny) w wierszu wynikowym. W naszym przypadku mamy jeden taki wyraz w kolumnie odpowiadającej zmiennej  $x_6$  (wynosi on  $-10$ ). Zmienna  $x_6$  powinna zatem wejść do rozwiązania bazowego na miejsce jednej z dotychczasowych zmiennych bazowych. W celu określenia indeksu zmiennej wymienianej znajdujemy wiersz dający minimalną wartość wyrażenia typu  $x_j = \min P_i/a_{ij}$ , gdzie  $a_{ij}$  jest współczynnikiem dodatnim, a  $P_i$  wartością odpowiedniego wyrazu wolnego. Tu  $x_j = \min \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ , czyli ostatecznie z bazy rugujemy zmienną  $x_5$ .

Przystępujemy do wypełnienia poprawionej wersji tabeli simpleks (II rozwiązanie).

Sposób wypełnienia tabeli simpleks (poprawionej):

Elementy wiersza ze zmienną rugowaną ( $x_5$ ) dzielimy przez współczynnik normujący  $a_{ji} = a_{56} = 1$ . W niezmienionej zatem postaci staną się one elementami wiersza  $x_6$  (zawierającego nową zmienną bazową). Elementy nowej kolumny  $x_5$  wyliczamy podobnie, z tym że dajemy im znak przeciwny.

Pozostałe elementy tablicy obliczamy odejmując od ich pierwotnej wartości iloczyn odpowiednich wartości elementów wiersza i kolumny, zawierających główny element rugujący, podzielony przez ten element (czyli przez 1).

Elementy wiersza wynikowego obliczamy w ten sam sposób.

Ponieważ po wypełnieniu II rozwiązania stwierdzamy brak elementów ujemnych w wierszu wynikowym (z wyjątkiem wartości formy liniowej  $-500$ ), zatem otrzymane rozwiązanie okazało się optymalne. Jest ono alternatywnym rozwiązaniem w stosunku do rozwiązania pierwotnego.

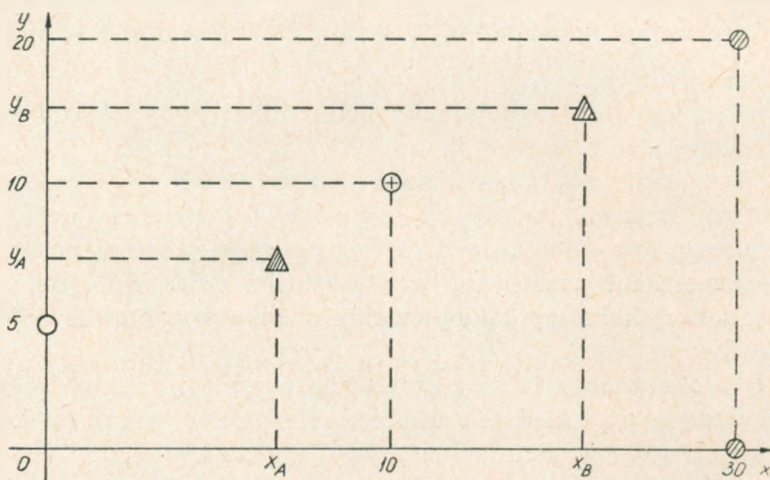
Wynika z tego, że drogą przekształceń algebraicznych przeprowadzonych na wstępie „mimo woli” uzyskaliśmy jeden z wariantów optymalnych rozwiązań. Ostatecznie minimalna długość połączeń poziomych wyniesie 500 km, zaś poszczególne zmienne zadania (odległości węzłów od punktów największego natężenia ruchu pocztowego i między tymi punktami) przyjmą wartości wyszczególnione w kolumnie  $P_0$ . Oczywiście po-miniemy występujące w bazie zmienne dodatkowe wprowadzone na wstępie dla ułatwienia rachunku.

Z rozwiązania wynika, że celowe jest, aby (z uwagi na masę przepływających przesyłek pocztowych) jeden urząd pocztowo-telekomunikacyjny otworzyć w bliskiej odległości dworca kolejowego ( $x_1 = 0$ ), a drugi w bezpośrednim sąsiedztwie drukarni ( $x_5 = 0$ ).

Rozważania te są słuszne w odniesieniu do układu poziomego wszystkich punktów.

Ponieważ rozwiązanie zadania w części „pionowej” przebiegałoby analogicznie i byłoby równie pracochłonne przy wykorzystaniu metody sympleks, dlatego rezygnujemy z jego omówienia na rzecz prezentacji niezwykle prostego (w porównaniu z poprzednio zastosowanym algorytmem) sposobu rozwiązania całości zagadnienia.

W nowej metodzie wykorzystujemy prostokątny układ współrzędnych dla graficznego zilustrowania zależności występujących w zadaniu.



Rys. 18. Usytuowanie poszczególnych punktów w układzie poziomym i pionowym

Poszczególne symbole mają takie same znaczenie jak poprzednio; wyrażenia  $x_{A,B}$ ,  $y_{A,B}$  oznaczają szukane współrzędne obu węzłów łączności. Położenie pozostałych elementów układu jest również określone przez odpowiednie współrzędne  $(x, y)$ , odpowiadające odległościom w poziomie i pionie.

Przystępując do rozwiązania stwierdzamy, że np. wartość bezwzględna  $(x_A)$  jest odległością poziomą węzła A od lotniska, wartości  $(10 - x_A)$  lub  $(10 - x_B)$  są odległościami obydwu węzłów od drukarni,  $(30 - x_B)$  oznacza odległość między dworcami a węzłem B oraz wreszcie  $(x_A - x_B)$  oznacza odległość poziomą bezwzględną między obydwooma węzłami łączności.



Stąd dobową długość przebiegu poziomego da się zapisać następująco:

$$f_x(x_A, x_B) = 10|x_A| + 20|10 - x_A| + 15|10 - x_B| + 20|30 - x_B| + 5|x_A - x_B|,$$

gdzie współczynniki literowe określają wielkości przepływu masy pocztowej między poszczególnymi punktami (wyrażone jak poprzednio w liczbie objazdów na dobę).

Zadanie sprowadza się do zminimalizowania powyższego wyrażenia funkcyjnego, bez żadnych dodatkowych ograniczeń zmiennych. Z rysunku 18 widać, że jeśli przyjąć wartość jednej ze zmiennych za stałą  $f_x(x_A, x_B)$  będąc sumą bezwzględnych wartości wyrażeń liniowych, osiąga minimum w jednym z punktów wierzchołkowych (punktów rozdziału). W każdym z tych punktów dwa wyrażenia liniowe, zawierające każde inną zmienną, równe są zeru. Odpowiednio  $f_x(x_A, x_B)$  osiąga minimum w jednym z następujących 6 par punktów:

$$\begin{array}{llll} x_A = 0, & x_B = 10, & x_A = 10, & x_B = 10, \\ x_A = 0, & x_B = 30, & x_A = 10, & x_B = 30, \\ x_A = 0, & x_B = 0, & x_A = 30, & x_B = 30 \end{array}$$

Uwzględniając wymienione 6 możliwości, otrzymujemy minimalną wartość funkcji-kryterium:

$$\min f_x(x_A, x_B) = \min f_x(10, 10) = f_x(10, 30) = 500$$

Analogicznie obliczamy dobową długość pionowych przejazdów:

$$f_y(y_A, y_B) = 10|5 - y_A| + 20|10 - y_A| + 15|10 - y_B| + 10|y_B| + 10|20 - y_B| + 5|y_A - y_B|$$

Punkty rozwiązań dopuszczalnych:

$$\begin{array}{llll} y_A = 5, & y_B = 10, & y_A = 5, & y_B = 5, & y_A = 10, & y_B = 20 \\ y_A = 5, & y_B = 0, & y_A = 10, & y_B = 10, & y_A = 0, & y_B = 0 \\ y_A = 5, & y_B = 20, & y_A = 10, & y_B = 0, & y_A = 20, & y_B = 20 \end{array}$$

oraz rozwiązanie optymalne:

$$\min f_y(y_A, y_B) = f_y(10, 10) = 250$$

Jak można sprawdzić, wyniki te pokrywają się z obliczeniami wykonanymi przy wykorzystaniu tabelarycznej metody simpleks.

### **Przykład 5. Graficzne rozwiązanie zagadnienia odpowiedniego doboru środków transportu (problem mieszanki)**

Przykład tu podany ma charakter uproszczony, pragniemy jednak z jego pomocą wykazać poglądowo przydatność prostych metod graficznych, skutecznie zastępujących bardzo skomplikowane rachunki związane

z ogólną metodą rozwiązywania problemów optymalizacyjnych — algorytmem sympleks. Ten ostatni bowiem opłaca się stosować tylko w odniesieniu do bardziej złożonych zadań.

Podane niżej zagadnienie transportowe wydaje się być dość typowe dla transportu pocztowego.

Zadanie nasze sprowadza się do przewozu określonej liczby przesyłek pocztowych trzech rodzajów: pojemników, paczek oraz worków po ustalonej trasie z miejscowości *A* do punktu docelowego *B*. Wielkość przewozu kształtuje się np. następująco: 60 szt. pojemników, 250 szt. paczek i 500 worków z pocztą. Do zrealizowania przewozu dysponujemy 2 rodzajami środków transportu (samochodów pocztowych), o poniższych możliwościach załadunku każdego rodzaju przesyłek z osobna:

Tablica 20

**Ładowność samochodów w sztukach poszczególnych rodzajów przesyłek**

Typ samochodu	Ładowność samochodów wyrażona w liczbie:		
	pojemników	paczek	worków
I	12	—	60
II	6	100	100

Koszty transportu po ustalonej trasie są stałe i nie zależą ani od liczby, ani od rodzaju ładunku (oczywiście w granicach maksymalnych ładowności). Wynoszą one odpowiednio 10 i 12 zł za 1 kurs dla pierwszego i drugiego typu samochodu. Przy takich założeniach należy zrealizować możliwie najtaniej zadanie przewozu przesyłek, co sprowadza się do zagadnienia ustalenia właściwej struktury parku samochodowego, tzn. odpowiednich ilości samochodów obydwu typów.

### Model matematyczny

Jeżeli liczbę pojazdów poszczególnych typów oznaczmy odpowiednio przez  $x_I$  i  $x_{II}$ , wówczas minimalizować będziemy wyrażenie:

$$Z = 10x_I + 12x_{II}$$

Współczynniki liczbowe przy zmiennych występujących w formie liniowej odpowiadają kosztom przewozu za pomocą obydwu typów samochodów.

Zmienne spełniać muszą ponadto poniższe warunki:

$$12x_I + 6x_{II} \geq 60$$

$$100x_{II} \geq 250$$

oraz  $60x_I + 100x_{II} \geq 500$

$$x_I, x_{II} \geq 0$$

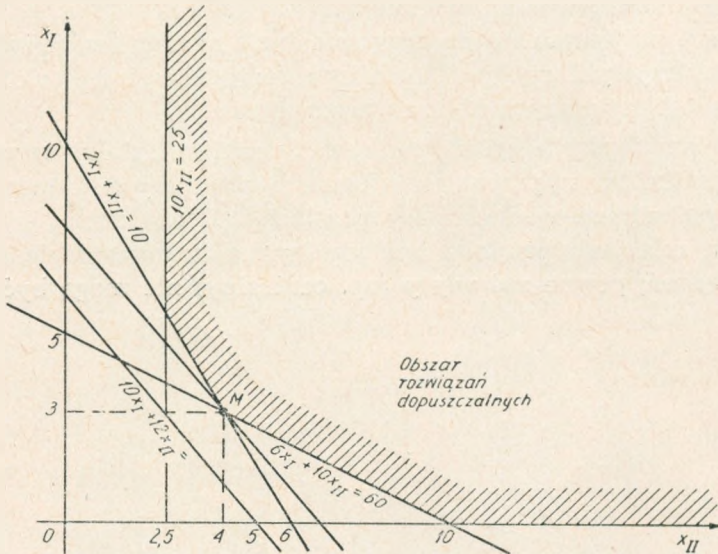
ponieważ liczba samochodów nie może być ujemna.

Przed graficzną ilustracją rozwiązania warunki te przedstawimy w dogodniejszej rachunkowo postaci:

$$Z = 10x_I + 12x_{II}$$

- 1)  $2x_I + x_{II} \geq 10$
- 2)  $10x_{II} \geq 25$
- 3)  $6x_I + 10x_{II} \geq 60$
- 4)  $x_I, x_{II} \geq 0$

Na wstępie rozwiązywania zagadnienia stwierdzamy, że czwarty warunek ogranicza naszą analizę do I ćwiartki prostokątnego układu współrzędnych.



Rys. 19. Graficzne rozwiązanie problemu

Pierwsze trzy warunki dają nam natomiast następujący obraz rozwiązania:

### Objaśnienie

Rozwiązując dla dowolnej wartości formę liniową: np.  $10x_I + 12x_{II} = 6$  (po uproszczeniu  $5x_I + 6x_{II} = 3$ ) oraz przesuwając jej graficzne odbicie równolegle do punktu zetknięcia się z obszarem rozwiązań dopuszczalnych, znajdujemy optimum zadania, tzn. punkt  $M$ , należący do obszaru rozwiązań niesprzecznych z warunkami zadania i spełniający równocześnie nasze założenie minimalnych kosztów transportu. Współrzędne tego punktu określają niezbędne i odpowiednie liczby środków transportu obydwu rodzajów. W tym przypadku  $x_I = 3$ , a  $x_{II} = 4$  (oczywiście z pew-



nym przybliżeniem, z uwagi na nieprecyzyjny rysunek i konieczność zaokrąglania wartości zmiennych do liczb całkowitych, które oznaczają przecież liczby niepodzielnych środków transportu).

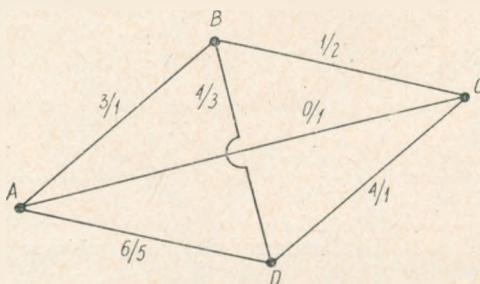
Łączna minimalna suma kosztów transportu wyniesie  $30 + 48 = 78$  zł.

### Przykład 6. Wybór optymalnego schematu wysyłki telegramów

W zadaniu tym zakładamy, że sieć telegraficzna (będąca częścią składową sieci telekomunikacyjnej) zorganizowana jest w system gwiazdowy, jako najbardziej opłacalny z techniczno-ekonomicznego punktu widzenia. W takim systemie bardzo ważny jest problem opracowania odpowiednich schematów przekazywania telegramów.

Za dane wyjściowe do opracowania tych schematów służą następujące charakterystyki ruchu telegraficznego: wielkość i struktura strumieni, liczba łączy oraz ich zdolność przepustowa.

Zadaniem służby telegraficznej jest zapewnienie stałej łączności przy możliwie najkrótszym przebiegu informacji oraz przy minimalnej liczbie połączeń pośrednich wzdłuż trasy przebiegu. Droga ruchu telegramów w obydwu relacjach powinna być identyczna, tranzyt dostosowany do mocy urządzeń, pewne zaś węzły (np. centralny) nie mogą być węzłami tranzytu.



Rys. 20. Schemat połączeń między węzłami

Opracowanie schematu ruchu telegramów jest zatem przedsięwzięciem złożonym, a równocześnie ważnym. Przyjęcie określonego schematu determinuje bowiem poziom jakości i szybkości przekazywania telegramów, stopień wykorzystania mocy urządzeń, wydajność pracy oraz koszty. Zadanie to daje się rozwiązać za pomocą programowania optymalizacyjnego.

W uproszczonym przykładzie założymy istnienie 4 węzłów telegraficznych. Ich moc określoną przez liczbę kanałów (lub wyrażoną w liczbie słów telegraficznych) oraz obciążenia na poszczególnych odcinkach podaje schemat graficzny na rysunku 20.

Opis: Punkty *A, B, C, D* oznaczają węzły, przy czym na rysunku podano wszystkie możliwe między nimi połączenia.

Warunki zadania (moc przesyłowa oraz obciążenie poszczególnych tras) przedstawia syntetycznie poniższa tabelka:

T a b l i c a 21  
T a b l i c a w y j ś c i o w a o b e j m u j ą c a  
w a r u n k i z a d a n i a

Węzły	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>A</i>	3/1	0/1	6/5
<i>B</i>		1/2	4/3
<i>C</i>			4/1

Na pierwszym miejscu podana jest liczba kanałów, na drugim obciążenie (zajętość kanałów).

Na podstawie powyższych danych możemy stworzyć następujące drogi połączeniowe:

<i>AB</i>	<i>AC</i>	<i>AD</i>	<i>BD</i>	<i>BC</i>	<i>CD</i>
<i>AB</i> - $x_1$	<i>ABC</i> - $x_4$	<i>AD</i> - $x_8$	<i>BD</i> - $x_{11}$	<i>BC</i> - $x_{14}$	<i>CD</i> - $x_{17}$
<i>ADB</i> - $x_2$	<i>ADC</i> - $x_5$	<i>ABD</i> - $x_9$	<i>EAD</i> - $x_{12}$	<i>EBC</i> - $x_{15}$	<i>CBD</i> - $x_{18}$
<i>ADCB</i> - $x_3$	<i>ABDC</i> - $x_6$	<i>ABCD</i> - $x_{10}$	<i>ECD</i> - $x_{13}$	<i>BCD</i> - $x_{16}$	<i>CBAD</i> - $x_{19}$
	<i>ADBC</i> - $x_7$				

Zadanie przedstawimy w postaci modelu programowania:

Najpierw zestawimy układ warunków ograniczających z uwagi na obciążenie:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + x_2 + x_3 & & \cong 1 \\
 x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & & \cong 1 \\
 x_8 + x_9 + x_{10} & & \cong 5 \\
 x_{11} + x_{12} + x_{13} & & \cong 3 \\
 x_{14} + x_{15} + x_{16} & & \cong 2 \\
 x_{17} + x_{18} + x_{19} & & \cong 1
 \end{array}$$

Warunki te oznaczają, że linie muszą być wykorzystane co najmniej na normalnym poziomie.

Drugi rodzaj warunków uwzględnia limity mocy przekazowych:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + x_4 + x_6 + x_9 + x_{10} + x_{12} + x_{16} + x_{19} & \leq & 3 \\
 x_3 + x_4 + x_7 + x_{10} + x_{13} + x_{14} + x_{18} + x_{19} & \leq & 1 \\
 x_2 + x_3 + x_5 + x_7 + x_8 + x_{12} + x_{16} + x_{19} & \leq & 6 \\
 x_3 + x_5 + x_6 + x_{10} + x_{13} + x_{15} + x_{16} + x_{17} & \leq & 4 \\
 x_2 + x_6 + x_7 + x_9 + x_{11} + x_{15} + x_{18} & \leq & 4
 \end{array}$$

Pierwsza np. nierówność tego układu oznacza, że maksymalne wykorzystanie poszczególnych połączeń z pkt. *B* jest ostatecznie limitowane przez liczbę kanałów na trasie *AB*.

Funkcja-kryterium przedstawia się jak następuje:

$$Z = x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 + x_9 + 2x_{10} + x_{12} + x_{13} + x_{15} + 2x_{16} + x_{18} + 2x_{19}$$

– minimum tranzytu.

Zadanie może być rozwiązane za pomocą metody simpleks, która była wykorzystana w poprzednim przykładzie.

### Przykład 7. Minimalizacja czasu transportu przesyłek jednorodnych

Ponieważ szybkość przekazywania masy pocztowej jest jednym z podstawowych wskaźników jakości pracy placówek łączności, dlatego wydaje się, że dość istotnym problemem jest m. in. możliwie najszybsze dostarczenie prasy z punktów dystrybucji do punktów odbioru. Rozwiązać go można wykorzystując stosunkowo prostą „metodę transportową” w wersji czasowej.

#### Opis problemu

Trzy punkty dystrybucji prasy, o określonych zdolnościach wysyłkowych, mają za zadanie dostarczyć w możliwie najkrótszym czasie prasę do 4 punktów odbioru. Te z kolei posiadają określone, różne poziomy chłonności prasy. Przykładowe wielkości podaży i zapotrzebowania na prasę zamieszczono w tabl. 22 (odpowiednio w kolumnie  $Q_i$  i wierszu  $q_j$ ):

Tablica 22

Warunki zadania

Punkty dystryb.	Punkty odbioru					$Q_i$
		1	2	3	4	
I		2	3	3	5	40
II		2	7	2	1	110
III		6	5	2	6	30
$q_j$		30	60	40	50	180

Elementy  $t_{ij}$  w poszczególnych klatkach macierzy (wydzielonej obwódką) oznaczają czas transportu z każdej bazy  $B_i (i = I, II, III)$  do każdego punktu docelowego  $P_j (j = 1, 2, 3, 4)$ ;  $Q_i$  (możliwości wysyłkowe



punktów dystrybucji) oraz  $q_j$  (zapotrzebowanie punktów odbioru) bilansują się globalnie.

Przystępując do rozwiązywania zadania, tworzymy tzw. tablicę bazową, wykorzystując w tym celu metodę „elementu maksimum”, tzn. że szukamy najwyższej w macierzy wartości z uwagi na czas transportu.

Z kolei staramy się tę wartość wyeliminować z rozwiązania. Tu  $t_{ij} \max = t_{112} = 7$  godz. Zaczynamy wypełniać tablicę od klatki (II, 2), budując tzw. „kontur o ujemnym wierzchołku”.

Tablica 23  
Wypełniona tablica transportowa z zachowaniem więzy bilansowych

	1	2	3	4	$Q_i$
I	$-30^a$	$10^a_+$	3	5	40
II	$+^a$	$-50^a$	$40^a$	$20^a$	110
III	6	5	2	$30^a$	30
$q_j$	30	60	40	50	180

Opis operacji: Z klatki wyjściowej (II, 2) przesyłamy możliwie największą ilość (z uwagi na więzy bilansowe) prasy do klatek sąsiednich o najniższych wskaźnikach czasu transportu (zapisujemy je w prawym górnym rogu poszczególnych klatek), w danym przypadku do klatki (I, 1). Staramy się następnie zbilansować ten przepływ przez pewien ruch cykliczny (tworzymy kontur prostokątny). W tym przypadku stwierdzamy, że maksymalna wielkość przesunięcia wyniesie  $q_j = 30$ . Tę wielkość odejmujemy od obydwu wierzchołków „ujemnych”, tzn. od elementów (I, 1) i (II, 2), aby po dodaniu jej do wierzchołków (I, 2) i (II, 1) otrzymać nową wersję tablicy transportowej (kolejne rozwiązanie możliwe):

Pamiętając dane tabl. 22 (wskaźniki czasu transportu), otrzymujemy w taki sam sposób następne rozwiązanie, przy  $t_{114} \max = 6$  dla  $q_{114}$  (fizyczna wielkość przepływu)  $> 0$ . Wykreślamy równocześnie wszystkie klatki, dla których  $t_{ij} = 6$ .

Dla elementu  $\max t_{114} = 6$ ,  $q_{114} > 0$  tworzymy nowy kontur, otrzymując kolejne rozwiązanie dopuszczalne (tabl. 26). Równocześnie wykreślamy klatki, dla których  $t_{ij} = 6$ .

Dla  $t_{112}$ ,  $q_{112} = 20$  nie można już stworzyć konturu ujemnego (po skreśleniu klatek z  $t_{ij} = 5$ ), powyższe rozwiązanie jest zatem ostateczne i optymalne. Łączny kurs optymalny wyniesie 410 godzin, co można obli-

Tablica 24

Kolejne przekształcanie tablicy transportowej

	1	2	3	4	$Q_i$
I	40				40
II	30	20 <sup>-</sup>	40	20 <sup>+</sup>	110
III	+			30 <sup>-</sup>	30
$q_j$	30	60	40	50	180

Tablica 25

Następny etap przekształceń tablicy transportowej

	1	2	3	4	$Q_i$
I	40				40
II	30	×	40 <sup>-</sup>	40 <sup>+</sup>	110
III	×	20	+	10 <sup>-</sup>	30
$q_i$	30	60	40	50	180

Tablica 26

Kolejne rozwiązanie dopuszczalne zadania transportowego

	1	2	3	4	$Q_i$
I	40			×	40
II	30	×	30	50	110
III	×	20	10	×	30
$q_j$	30	60	40	50	180

Tablica 27

Ostateczne rozwiązanie zadania transportowego

	1	2	3	4	$Q_i$
I	40 <sup>2</sup>				40
II	30 <sup>2</sup>		30 <sup>2</sup>	50 <sup>1</sup>	110
III		20 <sup>5</sup>	10 <sup>2</sup>		30
$q_j$	30	60	40	50	180

czyć dodając do siebie iloczyny liczb umieszczonych w poszczególnych kłatkach ostatecznego rozwiązania (tabl. 28).

Z rozwiązania tego wynika, że I punkt dystrybucji winien skierować całość prasy do II punktu odbioru, punkt II winien obsługiwać I, III i IV punkt odbioru, zaś punkt III winien dostarczyć brakujące ilości prasy punktom II i III, tzn. w tym ostatnim przypadku powinien pozostawić odpowiednią część prasy u siebie.

Przy okazji pragniemy dodać, że analogicznie można rozwiązać np. zadanie optymalnego z uwagi na koszty transportu przewozu pustych pojemników.

### Przykład 8. Wykorzystanie algorytmu transportowego do określenia optymalnego planu rozwoju central telefonicznych

Opis zagadnienia: Istnieją 3 centrale telefoniczne o określonych pojemnościach numerów, do których należy przyłączyć pewną znaną liczbę linii abonenckich, leżących na określonym obszarze. Oczywiście odległości między poszczególnymi centralami i rejonami różnią się między sobą.

Zakładając znajomość tych średnich odległości central telefonicznych od rejonów przyłączania w km, należy tak przyłączyć wszystkie linie abonenckie, aby zrealizować 100% planowanych przyłączeń możliwie najtaniej (wychodząc z kosztu km-łącza) lub — innymi słowy — przy najmniejszym zużyciu łączy.

Rejon „0” jest fikcyjny. Przyjęliśmy go dla uwzględnienia niewykorzystanej ewentualnie pojemności central telefonicznych. Jego odległości od tych central są równe zeru, co podaliśmy w odpowiedniej kolumnie tablicy 28.

Tablica 28  
Transportowa tablica warunków zadania

Centrale telefon.	Średnie odległości między rejonami a centralami w km (średnia długość łącza)					Moc central w nr nr
	1	2	3	4	0	
I	8	7	6	10	0	3000
II	6	15	11	6	0	2000
III	4	7	10	10	0	5000
Planowana liczba przyłączeń	1000	1500	2500	3000	2000	10000

Stronę rachunkową rozwiązania problemu transportowego znamy z poprzedniego przykładu. Tutaj pragniemy zauważyć jedynie, że zamiast średnich odległości rejonów przyłączania od central (wyrażonych w długości łącza), za kryterium wyboru rozwiązania można przyjąć wskaźnik kosztów eksploatacji (lub budowy) 1 km linii (zakładając oczywiście jednorodność rozwiązań technicznych). Optymalny wariant zostanie wówczas określony pod kątem minimalizacji kosztów inwestycyjnych bądź eksploatacyjnych linii abonenckich. Rozwiązanie zadania z wykorzystaniem algorytmu transportowego pozwala na znaczne zmniejszenie ponoszonych nakładów związanych z pracą central.

W rzeczywistości problem jest bardziej skomplikowany i wymaga dodatkowego rozwiązania szeregu innych zagadnień wiążących się m. in. z wyborem miejsc rozmieszczenia central, określeniem ich pojemności, przyjęciem odpowiednich wariantów technicznych budowy sieci itp.



### Przykład 9. Planowanie rozwoju sieci radiofonicznej

Organizacja sieci radiofonicznej zależy od warunków, w jakich ma ona działać, m. in. od liczby punktów zamieszkania oraz ich wielkości (obszar i liczba ludności). Ponieważ nakłady inwestycyjne jednostkowe są odwrotną funkcją mocy radiowęzła, koszty zaś eksploatacyjne kształtują się proporcjonalnie do tej mocy, dlatego jej określenie jest jednym z najważniejszych zadań. Z matematycznego punktu widzenia zadanie wyboru (pomijamy tu względy natury technicznej) prowadzi do ustalenia optymalnego powiązania poszczególnych miejscowości z obsługującymi je radiowęzłami, z uwagi na wspomniane koszty obydwu rodzajów.

W naszym przykładzie za kryterium wyboru rozwiązania przyjmiemy wielkość nakładów inwestycyjnych wiążących się z budową linii radiofonicznych, łączących węzły bezpośrednio z określonymi miejscowościami. Dla uproszczenia przyjmujemy przy tym, że jeden radiowęzeł obsługuje jedną miejscowość.

Tablica 29

**Nakłady inwestycyjne na budowę linii radio-transmisyjnej (w tys. zł) łączącej węzły z poszczególnymi rejonami odbioru (dane przykładowe, fikcyjne)**

Węzły	Rejony odbioru			
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	8	3	4	5
$A_2$	6	7	3	7
$A_3$	5	4	9	2
$A_4$	8	8	4	5
$A_5$	10	3	4	3

Do rozwiązania wykorzystamy metodę węgierską, nadającą się szczególnie do zastosowania przy problemach przydziału.

Na wstępie włączymy do rozwiązania rejon fikcyjny, dla którego koszty inwestycji wynoszą wszędzie zero. W ten sposób otrzymujemy kwadratową macierz inwestycyjną, niezbędną dla dalszych rachunków.

Formalne rozwiązanie zadania metodą węgierską sprowadza się do określenia niezależnych elementów macierzy (liczby równej stopniowi macierzy — czyli w tym przypadku 5), tak aby ich suma była minimalna. Niezależnym elementom nie odpowiada przy tym inny, równy co do wartości element wiersza czy kolumny macierzy, do których te elementy należą.

### Opis kolejnych operacji

W pierwszym etapie (przygotowawczym) wybieramy w każdej kolumnie macierzy element najmniejszy (w zadaniu na minimum) i odejmujemy go od pozostałych elementów kolumny. W tabl. 30 elementy minimum wyodrębniliśmy kółkiem.

Tablica 30

Przekształcona kwadratowa macierz inwestycyjna

8	③	4	5	①
6	7	③	7	0
⑤	4	9	②	0
8	8	4	5	0
10	3	4	3	0

Tablica 31

Macierz wartości zredukowanych wg elementów minimum w każdej z kolumn

⊕	+	+	+	
3	0*	1	3	0
1	4	0*	5	0
0*	1	6	0'	0
3	5	1	3	0*
5	0	1	①	0

W wyniku operacji odjęcia, w każdej kolumnie pojawiło się co najmniej jedno zero. Ponieważ również każdy wiersz zawiera przynajmniej jedno zero, nie zachodzi więc potrzeba wykonania redukcji w wierszach.

Z kolei elementy niezależne oznaczamy gwiazdką. Mamy na razie 4 zera niezależne. Szukamy drogą kolejnych przekształceń macierzy 5. zera niezależnego. Kolumny zawierające zera niezależne wyodrębniamy znakiem „+”.

Następnie analizujemy elementy niewydzielone macierzy (całą 4. kolumnę). Występuje wśród nich także zero niewydzielone, należące przy tym do wiersza zawierającego już zero niezależne. W takim przypadku zero niewydzielone oznaczmy symbolem „'”, wydzielamy 3. wiersz macierzy, kasując jednocześnie znak plus nad 1. kolumną (przestaje ona być wydzieloną). Czynność tę powtarzamy do momentu, kiedy nie ma zer omówionego rodzaju lub wszystkie zera okażą się wydzielone. Ponieważ nastąpiło to po pierwszym przekształceniu, przystępujemy zatem do kolejnej czynności odjęcia elementu niewydzielonego minimum (= 1, w kółku) od elementów niewydzielonych wierszy macierzy i dodania go do elementów wydzielonych kolumn. Rezultat operacji przedstawia kolejna macierz w tabl. 32.

Po ostatecznym określeniu zer prim, budujemy tzw. łańcuch połączeń wg następującej zasady:

Rozpoczynamy od zera prim i idąc wzdłuż kolumny, staramy się połączyć go z zerem z gwiazdką występującym w tej samej kolumnie, te z kolei łączymy z następnym zerem prim, idąc wzdłuż wiersza, a zero

prim z kolei z zerem z gwiazdką idąc kolumną itd., aż do wyczerpania możliwości przemiennych połączeń. Ponieważ w naszym przykładzie takiego łańcucha zbudować nie można, więc zero prim ze strzałką (początek niezrealizowanego łańcucha) przemianowujemy na zero z gwiazdką (brakujące zero niezależne). Wraz z pozostałymi zerami z gwiazdką tworzy ono rozwiązanie zadania. Zgodnie z nim minimum kosztów wyniesie:  $5 + 3 + 3 + 3 = 14$ .

Tablica 32  
Macierz po operacji z elementem minimum  
oraz po powtórnych przekształceniach,  
omówionych w trzecim etapie

	+	⊕		+	
2	0*	1	2	0	
0'	4	0*	4	0	+
0*	2	7	0'	1	+
2	5	1	2	0*	
4	0	1	0'	0	

Rozdział rejonów odbioru między poszczególne węzły przedstawia się jak w tabl. 33.

Tablica 33  
Rozdział punktów odbioru między węzły

Węzły	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
Punkty odbioru	$B_2$	$B_3$	$B_1$	—	$B_4$

Powyższy przykład można skomplikować, znosząc założenie, że jeden węzeł winien obsługiwać tylko jedną miejscowość. Metoda rozwiązania nie ulegnie zmianie jakościowej, lecz zwiększy się liczba przekształceń.

### Przykład 10. Wykorzystanie metody węgierskiej do rozwiązania zagadnienia transportu pocztowego

Aby zrealizować zadanie przewozowe w trzech urzędach pocztowych, należy do nich skierować z baz po jednym samochodzie. Dysponujemy czterema samochodami rozlokowanymi w różnych punktach:  $B_1, B_2, B_3, B_4$ . Przy znanych odległościach tych baz od poszczególnych urzędów pocztowo-telekomunikacyjnych  $A_1, A_2, A_3$  należy określić, które maszyny i do jakiej placówki wysiać, aby sprowadzić do minimum łączną wielkość pustych przebiegów samochodowych (w km).



Przekształcenia wstępne: wyznaczanie kolumnowych elementów minimum oraz czynności redukcji pozostałych elementów macierzy.

Wykonujemy czynność wydzielenia kolumn z zerami niezależnymi. Ponieważ brak elementów niewydziałonych, zadanie jest rozwiązane po pierwszym kroku iteracyjnym.

Ostatecznie, zgodnie z rozwiązaniem, samochód z  $B_2$  wysyłamy do  $A_1$ , z  $B_3$  do  $A_2$ , z  $B_4$  do  $A_3$ . Jeden samochód pozostaje w bazie  $B_1$ . Najmniejsza suma pustych przebiegów wyniesie  $3 + 2 + 2 = 7$  km.

Tablica 34

## Przykładowe warunki zadania

Urzędy	$A_1$	$A_2$	$A_3$
Pojazdy z baz:			
$B_1$	7	6	8
$B_2$	3	5	4
$B_3$	5	2	5
$B_4$	3	4	2

Tablica 35

Macierz wyjściowa z uwzględnieniem likeyjnego urzędu  $A_0$ 

7	6	8	①
③	5	4	0
5	②	2	0
3	4	②	0

Tablica 36

## Macierz przekształcona

+	+	+	+
4	6	8	0*
0*	5	2	0
5	0*	0	0
0	4	0*	0

### 4.3. Zagadnienia programowania dynamicznego; przykład ogólny metody programowania dynamicznego

Ponieważ rachunek rekurencyjny, stosowany w programowaniu dynamicznym prowadzi do niezwykle pracochłonnych rozwiązań tabelarycznych, przekreślających możliwość ręcznego liczenia, dlatego ograniczymy się jedynie do szczegółowego omówienia metodologii programowania dynamicznego, wskazując przy tym na możliwości jego zastosowania na gruncie ekonomiki łączności<sup>1)</sup>. Pominiemy przy tym omówienie modeli dynamicznych uwzględniających konkretnie czynnik czasu, które jednak dają się rozwiązać za pomocą klasycznych metod programowania optymalizacyjnego (np. za pomocą metody simpleks programowania liniowego),

<sup>1)</sup> Problematyką programowania dynamicznego zajęto się szerzej w pracy planowej wykonanej przez autora w Zakładzie Ekonomiki Łączności IŁ pt.: Zagadnienia optymalnej alokacji sił wytwórczych w pp. PPTiT.

skoncentrujemy się natomiast na zagadnieniach rozwiązywanych z wykorzystaniem metod dynamicznych, stosujących rachunek rekurencyjny i bazujących na tzw. zasadzie optymalności<sup>1)</sup> programowania dynamicznego.

Zasadniczą cechą charakterystyczną metod tego rodzaju jest dążenie do rozpatrywania zagadnień w rozbiciu na kolejno następujące stadia. Jak dotąd, brak jest formalnego uogólnienia dla metod „programowania dynamicznego”. Można mówić o pewnych typach modeli dynamicznych, dających się stosować do rozwiązywania bądź problemów inwestycyjnych, bądź problemów zapasów, bądź też zagadnień optymalizacji programów produkcyjnych.

Omówimy tu w sposób ogólny zagadnienie wykorzystania metod dynamicznych do ustalenia optymalnego planu remontu dowolnego rodzaju urządzeń łączności.

### Opis problemu:

Rozpatrujemy 5-letni okres pracy określonego urządzenia. Będzie to zatem zagadnienie 5-stadialne. W okresie tym uzyskujemy określony zysk (przychód netto) z pracy urządzenia. Co rok przeprowadzamy ocenę, o ile na skutek postępującego pogarszania się parametrów eksploatacyjnych urządzenia obniża się poziom zysku. W konsekwencji każdego roku planu stajemy przed podjęciem alternatywnych decyzji albo dalszego wykorzystywania urządzenia bez poddawania go remontowi albo też wyłączenia go z cyklu produkcyjnego na okres czasu, jakiego wymaga remont.

Zadanie optymalizacji sprowadzi się do ustalenia właściwego w skali 5 lat harmonogramu remontowego, biorąc pod uwagę następujące dodatnie i ujemne skutki naszej decyzji: wydatki na remont oraz straty zysku na skutek wyłączenia urządzenia z eksploatacji — z jednej strony, a z drugiej — ponowne doprowadzenie wyników eksploatacyjnych po remoncie do poziomu pierwotnego.

### Model matematyczny:

Gdy  $z(0)$  oznacza zysk z urządzenia w roku wyjściowym (rok wdrożenia do eksploatacji),  $s$  — stratę zysku w skali rocznej jako wynik starzenia się urządzenia, to — jeżeli łączny zysk za 5 lat oznaczymy przez  $f_5(t)$ ;

---

<sup>1)</sup> W myśl tej zasady „niezależnie od początkowego stanu i początkowej decyzji pozostałe decyzje muszą stanowić politykę optymalną ze względu na stan wynikający z pierwotnej decyzji” (R. E. Bellman, S. E. Dreyfus: Programowanie dynamiczne. PWE, Warszawa 1967, s. 21. Tamże dowód).

a zysk za ostatnie 4 lata jako  $f_4(t+1)$  (rozpoczynamy tu liczenie od roku 2, czyli o rok później) — następująca zależność funkcyjna jest prawdziwa:

$$f_5(t) = z(0) + f_4(t+1)$$

Oznacza ona, że łączna suma zysków za lat 5 równa jest sumie zysku osiągniętego w roku wyjściowym i łącznych zysków za ostatnie 4 lata.

Wyrażenie to staramy się optymalizować, wychodząc z założenia, że funkcja dowolnego stadium jest określona przez jej wartość w stadium poprzedzającym.

Jeżeli chcemy przeprowadzić remont urządzenia, wówczas koszt tego remontu w skali rocznej wyniesie na przykład „ $i$ ”. Na ten cel przeznaczymy część zysku globalnego. Można założyć, że wielkość „ $i$ ” odpowiada zyskowi w roku przeprowadzania remontu ( $i = z(t)$ ), lecz jest ujemna. Staramy się określić wynik netto operacji remontowej przynoszącej z jednej strony straty równe całorocznemu zyskowi, a z drugiej przywracającej dawną zdolność wytwórczą urządzenia.

Założymy, że dokonano remontu na początku trzeciego roku pracy maszyny. W kolejnym trzecim stadium zamiast zysku w wysokości  $z(2)$  zrealizujemy zatem zysk w pierwotnej wartości  $z(0)$ . W pozostałych latach badanego okresu 5 lat zysk ukształtuje się również na odpowiednio wyższym poziomie: dla stadium czwartego wyniesie on  $z(1)$  (zamiast  $z(3)$ ), a dla piątego  $z(2)$  zamiast  $z(4)$ . Ogólny efekt przeprowadzenia remontu na początku trzeciego stadium można ująć następująco:

$$f_3 = -i + z(0) + f_2(1)$$

gdzie:

- $i$  — nakłady inwestycyjne równe  $z(1)$ , czyli zyskowi z roku poprzedzającego remont,
- $z(0)$  — zysk osiągnięty po pierwszym roku pracy urządzenia wyremontowanego równy z założenia zyskowi z roku wyjściowego,
- $f_2(1)$  — funkcja łącznego zysku dla dwu lat pracy pozostałych do końca okresu.

Ogólnie powyższą zależność można przedstawić jak niżej:

$$f_N(t) = -i + z(0) + f_{N-1}(1)$$

Naszą strategię postępowania, wynikającą z konieczności dokonywania każdego roku wyboru między pracą urządzenia na dotychczasowych warunkach a przeprowadzeniem remontu, zapisujemy tworząc układ równań rekurencyjnych:

$$f_N(t) = \max \begin{cases} z(t) + f_{N-1}(t+1) \\ -i + z(0) + f_{N-1}(1) \end{cases}$$



Innymi słowy, dla każdego roku z osobna porównujemy efekty obrania jednej z dwu strategii postępowania sprowadzających się do alternatywy: remontować czy nie remontować urządzenie w danym roku.

Powyzsza zależność ma podstawowe znaczenie w dynamicznym programowaniu optymalizacyjnym. Jej rozwiązywanie rozpoczynamy od momentu zakończenia przedostatniego stadium ( $N = 1$ ), czyli od zbadania wartości alternatywnych funkcji  $f_1(t)$ .

Stąd układ nasz przybierze następującą postać:

$$f_1(t) = \max \begin{cases} z(t) + f_0(t+1) \\ -i + z(0) + f_0(1) \end{cases}$$

Ponieważ funkcje  $f_0$  oznaczają zyski w momencie, gdy do zakończenia okresu 5 lat nie pozostało już żadne stadium, zarówno  $f_0(t+1)$  jak i  $f_0(1)$  posiadają wartość zero i nasz układ znacznie się upraszcza:

$$f_1(t) = \max \begin{cases} z(t) \\ -i + z(0) \end{cases}$$

Ostatecznie porównujemy zatem dla każdego roku planowy zysk przy pracy urządzenia na starych warunkach oraz saldo nakładów remontowych i wysokości zysku pierwotnego.

W podobny sposób można rozwiązać zagadnienie rozdziału funduszu inwestycyjnego bądź funduszu zatrudnienia przyrostowego między poszczególne działy pp. „Polska Poczta, Telegraf i Telefon”, kierując się wysokością działowych współczynników kapitałochłonności.

#### 4.4. Programowanie liniowe a programowanie dynamiczne

Zagadnienie optymalizacji struktury produkcji usług łączności daje się w sposób względnie łatwy przekształcić z problemu z zakresu programowania liniowego na zadanie programowania dynamicznego. Pozwala to nam uprościć w znacznym stopniu narzędzia rachunku optymalizacyjnego, gdyż rezygnujemy z pracochłonnych metod programowania liniowego na rzecz bardziej prostych (szczególnie dla układów o niedużej liczbie zmiennych) metod rachunku rekurencyjnego.

Zadanie na optymalizację programu liniowego w celu ustalenia struktury produkcji usług łączności można rozpatrywać zatem jako proces stadialny, w którym za stadium przyjmiemy logiczną operację wprowadzenia do rozwiązania kolejnej zmiennej. Zamiast 1-stadialnego procesu alokacji dokonywanego na zbiorze  $n$  zmiennych, mamy do zbadania  $n$ -stadialny proces określenia wielkości każdej zmiennej z osobna.

**Model matematyczny:**

Układ warunków bilansowych dla pierwszej zmiennej (I stadium):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &\leq b_1 \\ a_{12}x_1 &\leq b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ a_{1m}x_1 &\leq b_m \end{aligned}$$

przy założeniu:  $x_1 = 0$

Po przekształceniu otrzymujemy zbiór możliwych wartości dla:

$$x_1 \in \left\{ \frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{12}}, \frac{b_3}{a_{13}}, \dots, \frac{b_m}{a_{1m}} \right\}$$

Z własności rozwiązywania układu nierówności wiemy, że zmienna  $x_1$  może być najwyżej równa w tym przypadku najmniejszej wartości z powyższego zbioru.

W przypadku określenia zadania na maksimum zmienna zostanie określona na podstawie poniższej zależności:

$$x_1 = \min \left[ \frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{12}}, \frac{b_3}{a_{13}}, \dots, \frac{b_m}{a_{1m}} \right]$$

Dla pierwszego stadium funkcja-kryterium wyraża się wzorem:

$$F_1 = c_1x_1$$

gdzie:

$c_1$  — oznacza na przykład cenę (opłatę za dany rodzaj usługi łączności),

$x_1$  — wartość zmiennej w pierwszym przybliżeniu, wyznaczoną wyżej.

W stadium drugim wprowadzamy do programu następną zmienną  $x_2$ , przy czym jej wartość w pierwszym przybliżeniu obliczamy identycznie jak wartość zmiennej  $x_1$ . Wartość tej ostatniej ulegnie natomiast korekcie. Uwzględniając zależności natury techniczno-bilansowej zachodzące wewnątrz badanego układu (w tym przypadku układu 2-stadiowego) zmienna  $x'_1$  (wartość poprawiona) zostanie zdeterminowana przy pomocy następującego równania:

$$x'_1 = \min \left[ \frac{b_1 - a_{21}x_2}{a_{11}}, \frac{b_2 - a_{22}x_2}{a_{12}}, \dots, \frac{b_m - a_{2m}x_2}{a_{1m}} \right]$$

Funkcja celu dla dwu stadiów przyjmie następującą formę:

$$F_2 = \max [c_2x_2 + F'_1(x_1)]$$

gdzie:

$F'_1(x_1)$  — skorygowana funkcja dla stadium pierwszego (równa wyrażeniu  $c_1x'_1$ ),

$c_2x_2$  — iloczyn oceny drugiej zmiennej przez jej wielkość w pierwszym przybliżeniu.

Proces ma charakter iteracyjny, tzn. wprowadzenie każdej następnej zmiennej (przejście do kolejnego stadium) wiąże się z koniecznością „łańcuchowego” poprawiania wartości zmiennych poprzedzających. Proces rachunku kończy się w chwili wprowadzenia do rozwiązania ostatniej możliwej zmiennej programu, czyli takiej, że odpowiadająca jej łączna wartość funkcji-kryterium  $F_N > F_{N-1}$  (gdzie  $N$  = ilość stadiów-zmiennych).

## 5. ZAKOŃCZENIE

Omówione w artykule numeryczne przykłady z zakresu programowania liniowego oraz przykłady ogólne zastosowania metod programowania dynamicznego nie wyczerpują, rzecz jasna, wszelkich możliwości zastosowania rachunku optymalizacyjnego w dziedzinie łączności. W doborze przykładów kierowaliśmy się z jednej strony chęcią uwzględnienia problematyki najistotniejszej dla tej dziedziny, a z drugiej — pragnieniem uniknięcia zbędnego powtórzenia zagadnień, które zostały omówione w dotychczas opublikowanych pracach z zakresu zastosowania metod optymalizacyjnych w łączności. Prace te zostały wymienione w wykazie literatury przedmiotu oraz były niejednokrotnie wspomniane w niniejszym opracowaniu.

Ponieważ wszystkie przykłady musiały być z przyczyn obiektywnych rozwiązane ręcznie, dlatego też — z uwagi na dużą pracochłonność przedsięwzięcia — należało zrezygnować z problemów zbyt obszernych.

Autor wyraża nadzieję, że praca spełni swą rolę wstępu do dalszych badań nad możliwością wykorzystania w szerszym zakresie metod matematycznych do rozwiązywania coraz większej liczby zagadnień zarówno z dziedziny telekomunikacji, jak i łączności pocztowej w Polsce.

### WYKAZ LITERATURY

1. *Ambarcumow A.*: Problemy ispolzowanija matematičeskich metodow w planirowanii (Planowanie Chozjajstwo) 1968 nr 2.
2. *Barsuk W. A., Gubin N. M.*: Matematičeskije metody planirowanija i upravlenija w chozjajstwie swjazj. Swiaź, Moskwa 1966.
3. *Bellman R. E., Dreyfus S. E.*: Programowanie dynamiczne. Zastosowanie. PWE. Warszawa 1967.



4. Charnes A., Cooper R. W.: *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*. N. Ycrk 1959.
5. Dudziński Zb.: Matematyczne rozwiązanie sieci telekomunikacyjnej za pomocą algorytmu simpleks. *Prace IŁ*, 1964, z. 1 (34).
6. Ludziński Zb.: Zastosowanie metod matematycznych do optymalizacji wybranych zagędnici sieci telekomunikacyjnych. BPIŁ, Warszawa 1967.
7. Dudziński Zb.: Współzależność między rozwojem łączności a rozwojem gospodarki narodowej. *Prace IŁ*, 1967, z. 4 (40).
8. Dudziński Zb.: Fróba analizy stosunków między gospodarką narodową a łącznością (przy zastosowaniu metod analizy przepływów międzydziałowych). *Prace IŁ*, 1967, z. 2 (46).
9. Dudziński Zb.: Zagadnienie optymalnego rozkładu zmian personelu w warunkach nierównomiernego natężenia pracy. *Problemy Łączności IŁ*, 1968 nr 30.
10. Dudziński Zb., J. Kulesza: Badanie współzależności między rozwojem telekomunikacji a rozwojem gospodarki narodowej w skali światowej i w Polsce. BPPŁ, Warszawa 1968.
11. Galoch A.: Kryteria alokacji sił wytwórczych w dziedzinie łączności (Problem optymalizacji struktur inwestycyjno-produkcyjnych). *Problemy Łączności IŁ*, 1968 nr 30.
12. Galoch A.: Zagadnienia optymalnej alokacji sił wytwórczych w pp. PPTiT. *Zakład Ekonomiki Łączności IŁ*, 1969 (maszynopis).
13. Gurin A. S., Dymarskij J. S.: *Zadaczi i metody optimalnogo raspriedielenija resursow*. Sowiejskoje Radio, Moskwa 1968.
14. Hellwig Z. (red.): *Zarys ekonometrii*. PWE, Warszawa 1968.
15. Kantorowicz L.: *Rachunek ekonomiczny optymalnego wykorzystania zasobów*. PWN, Warszawa 1961.
16. Krorrcd J.: *Ekonomiczeskij optimum i niekoteryje woprosy metodologii optimizacji narodnochozjajstwiennych panow*. *Woprosy Ekonomiki*, 1968 nr 1.
17. Lange O.: *Wstępc do ekonometrii*. PWN, Warszawa 1967, wyd. 4.
18. Lange O.: *Optymalne decyzyje*. PWN, Warszawa 1967, wyd. 2.
19. Lesz M.: *Techniczno-ekonomiczne zastoscwiania metod programowania dynamicznego*. PWE, Warszawa 1968.
20. Lesz M. (red.): *Ekonometria a praktyka planowania*. PWE, Warszawa 1965.
21. Macniew W N., Barsuk W. A.: *Trimicnienije matiematiczeskich metodow w organizacii pocztowej swiazi*. *Wiesticnik Swiazi*, 1968 nr 2.
22. *Matiematiczeskije metody planirowanija i uprawlenija w chozjajstwie swiazi*. (art. red.). *Wiesticnik Swiazi*, 1968 nr 1.
23. Niemczynow W.: *Metody i modele ekonomiczno-matematyczne*. PWE, Warszawa 1964.
24. Osmycki A., Zurkowski J.: *Zastoscwianie analizy input-output do prognozy rozwoju perspektywicznego w latach 1966—85, ze szczególnym uwzględnieniem potrzeb inwestycyjnych w poszczególnych 5-leciach*. *Kom. Plan. RM*, 1968 (maszyn.).
25. Pawłowski Zb.: *Ekonometria*. PWN, Warszawa 1966.
26. Rafałowicz Z.: *Planowanie perspektywicznego rozwoju telefonii*. WKiŁ, Warszawa 1963.
27. Rakowski M.: *W sprawie metod optymalizacji programów rozwoju poszczególnych gałęzi produkcji*. *Gospodarka Planowa*, 1966 nr 5.
28. Sadowski W.: *Teoria podejmowania decyzyji*. PWE, Warszawa 1964, wyd. 3.
29. Simonnard M.: *Linear Programming*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs. N. Jersey 1966.

30. *Strumilin S.*: O kriterijach w optimalnom planowaniu. *Woprosy Ekonomiki*, 1968 nr 4.
31. *Tymiński J.*: Zastosowanie programowania liniowego do optymalizacji struktury produkcji. *Ekonomika i Organizacja Pracy*, 1968 nr 4.

*A. Galoch*

ИЗБРАННЫЕ МЕТОДЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ (ОПТИМИЗАЦИИ)  
И ВОЗМОЖНОСТИ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В СЛУЧАЕ РЕШЕНИЯ  
ЭКОНОМИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ СВЯЗИ

Резюме

В статье представлено ряд предложений использования методов оптимизации для решений избранных экономическо-технических вопросов в области почтового ведомства и связи.

Для иллюстрирования проблематики автор воспользовался численными примерами применения линейного программирования а также общим примером динамического программирования.

Глава касающаяся методологии разрабатываемой темы следует за изложением теоретической лекции по вопросам теории оптимизации.

*A. Galoch*

SELECTED METHODS FOR OPTIMUM PROGRAMMING AND POSSIBILITIES OF THEIR APPLICATIONS IN RESOLVING THE TELECOMMUNICATIONS ECONOMICAL PROBLEMS

Summary

In the paper some propositions of utilization of the methods for optimum resolving the selected economical and technical questions concerning the post and telecommunications have been presented.

In order to explain these problems, the author has made use of some numeric examples of application of linear programming methods and of a general example of dynamic programming.

The methodological part of the article has been preceded by a theoretical presentation of the optimum programming problem.

*A. Galoch*

MÉTHODES CHOISIES DE PROGRAMMATION OPTIMALE ET POSSIBILITÉS DE LES APPLIQUER POUR LA SOLUTION DES PROBLÈMES ÉCONOMIQUES DE TÉLÉCOMMUNICATIONS

Résumé

Dans l'article, certain nombre de propositions a été présenté afin de mettre au profil les méthodes d'optimalisation des solutions concernant les questions économiques et techniques choisies du domaine de la poste et des télécommunications.

Pour illustrer les problèmes on s'est servi des exemples numériques concernant

la méthode de la programmation linéaire ainsi que d'un exemple général de la programmation dynamique.

La partie de l'article ayant le caractère méthodologique est précédée d'un cours théorique sur les problèmes de calcul de l'optimisation.

*A. Galoch*

AUSGEWÄHLTE METHODEN DER PROGRAMMBEARBEITUNG FÜR OPTIMALE RECHNUNG  
UND DIE MÖGLICHKEITEN DEREN ANWENDUNG ZUM LÖSEN DER ÖKONOMISCHEN  
PROBLEME DES FERNMELDEWESEN

#### Zusammenfassung

Im Artikel werden einige Vorschläge zur Ausnutzung der Optimierungsmethoden des Lösen der ausgewählten technisch-ökonomischen Probleme aus dem Gebiet der Fernmeldewesen gegeben.

Zur besseren Darstellung der Problematik hat man die Zahlenbeispiele der Anwendung von Linearen Programmierungsmethoden als auch ein allgemeines Beispiel aus dem Bereich der dynamischen Programmierung eingeführt.

Vor dem methodologischen Teil der Arbeit wird ein Vortrag über die Problematik der Optimierungsrechnung angegeben.





## Prof. mgr inż. SYLWESTER JARKOWSKI

Telekomunikacja polska poniosła ostatnio ciężką i niepowetowaną stratę. W dniu 11 lutego 1970 r., po długiej chorobie, zmarł *prof. mgr inż. Sylwester Henryk Jarkowski* — Kierownik Zakładów Komunikacji Mikrofalowej oraz Propagacji Fal Radiowych w Instytucie Łączności. Odszedł wybitny naukowiec i specjalista, który cały ponad trzydziestoletni okres swojego życia zawodowego poświęcił rozwojowi umiłowanej dziedziny nauki i techniki.

Jeszcze przed ukończeniem studiów wyższych rozpoczyna w 1936 r. pracę w Państwowym Instytucie Telekomunikacyjnym, a krótko przed wybuchem wojny przechodzi do prac badawczych w Oddziale Specjalnym Dowództwa Wojsk Łączności. Od tego czasu przez cały prawie okres swojego życia jest związany z pracą badawczą.

Z chwilą wybuchu wojny wstępuje ochotniczo do wojska i po kampanii wrześniowej przedostaje się na Węgry, skąd ucieka i przedziera się do Francji. Po upadku Francji wraz z Wojskiem Polskim przybywa do Wielkiej Brytanii, gdzie zostaje skierowany do Wojskowego Instytutu Technicznego na stanowisko pracownika badawczego i konstruktora. W 1943 r. zostaje z kolei delegowany do angielskiego laboratorium badawczego „Signal Research and Development Establishment”, gdzie pracuje do czasu demobilizacji i powrotu do kraju.

W kraju wraca do pracy w reaktywowanym Państwowym Instytucie Telekomunikacyjnym, a po jego podziale organizuje i obejmuje kierownictwo Zakładu Komunikacji Mikrofalowej w Instytucie Łączności. Na stanowisku tym pozostaje do końca swojego pracowit go i czynnego naukowego życia.

Badania prowadzone przez *prof. S. Jarkowskiego* i Jego dorobek naukowy w okresie przed i w czasie trwania wojny dotyczą przede wszystkim zagadnień obronnych. W tym okresie pracuje nad ważnym problemem wykrywania min niemagnetycznych, wykorzystaniem promieniowania podczerwonego do wykrywania łodzi i statków morskich, metodami zakłóceń stacji nieprzyjacielskich, zagadnieniami telegrafii o dużej szybkości, a także prowadzi pionierskie badania mechanizmu duktowej propagacji mikrofal nad morzem.

Po powrocie do kraju koncentruje swoje badania na problematyce mikrofalowych linii radiowych — kierunku w ówczesnym okresie całkowicie nowym w kraju. Badania te doprowadziły do opracowania w Instytucie urządzeń impulsowych linii radiowych dla potrzeb telefonii wielokrotnej, a także do opracowania wymagań technicznych na wiele rodzajów transmisyjnych linii radiowych, niezbędnych dla potrzeb krajowych.

Aktywność naukowa *prof. S. Jarkowskiego* nie pozwoliła Mu ograniczać się jedynie do pracy w Instytucie. Zajmuje się więc kształceniem nowej kadry technicznej i naukowej, prowadząc przez szereg lat wykłady ze swojej specjalności na Wydziale Łączności Politechniki Warszawskiej, a także przyjmując obowiązki promotora prac doktorskich z zakresu techniki i propagacji mikrofalowej. Ponadto opracowuje On również słownictwo z zakresu swojej specjalności oraz czynnie współpracuje z wie-

loma organizacjami technicznymi i naukowymi krajowymi i zagranicznymi, w których często przedstawiał wyniki swojej pracy badawczej i technicznej. W szczególności należy tu wymienić Jego udział w pracach Komitetu Elektroniki i Telekomunikacji PAN, Zespołów Problemowych KNiT oraz aktywną działalność w ramach międzynarodowych organizacji naukowych i technicznych, takich jak URSI, CCIR i RWPG.

Od szeregu lat *prof. S. Jarkowski* pełnił również funkcję naczelnego redaktora „Prac Instytutu Łączności” — czasopisma, w którym publikuje się oryginalne osiągnięcia Instytutu.

W uznaniu kwalifikacji i dorobku naukowego *prof. S. Jarkowskiego* Centralna Komisja Kwalifikacyjna dla Pracowników Nauki nadała Mu w 1954 r. tytuł naukowy docenta, a Rada Państwa w 1964 r. — tytuł naukowy profesora nadzwyczajnego. Niezależnie od tego, Rada Państwa w uznaniu Jego zasług odznaczyła Go w 1955 r. Srebrnym Krzyżem Zasługi, a w 1961 r. Krzyżem Kawalerskim Orderu Odrodzenia Polski. Był On również odznaczony Medalem za zasługi dla obronności kraju, Złotą Odznaką za zasługi dla Warszawy i innymi odznaczeniami.

Nieublagana choroba przedwcześnie wyrwała *prof. S. Jarkowskiego* z nielicznego grona wybitnych specjalistów telekomunikacji w Polsce oraz pozbawiła Jego bezpośrednich współpracowników cenionego i nieodżałowanego zwierzchnika. Pozostawił On po sobie trwałą pamięć w sercach swoich przyjaciół i bliskich kolegów.

Cena zł 16,—