

INSTYTUT ŁĄCZNOŚCI

# REFERATY PROBLEMOWE

Zeszyt 98

Zbigniew Kowalski

WYZNACZANIE ZMODYFIKOWANEJ TŁUMIENNOŚCI ODNIESIENIA  
O LOGARYTMONORMALNYM ROZKŁADZIE WAGI



Warszawa 1990

621.317.34.018.8

I N S T Y T U T      Ł A C Z N O Ś C I

---

KOŁO ZAKŁADOWE STOWARZYSZENIA ELEKTRYKÓW POLSKICH

R E F E R A T Y      P R O B L E M O W E

Zeszyt 98

Zbigniew Kowalski

WYZNACZANIE ZMODYFIKOWANEJ TEUMIENNOŚCI ODNIESIENIA

O LOGARYTMONORMALNYM ROZKŁADZIE WAGI

Warszawa 1990

S-10055

Zespół Redakcyjny:

doc. dr inż. Stanisław Sońta, mgr inż. Andrzej Stagrowski  
mgr inż. Krystyna Frączek

Opracował:

dr inż. Zbigniew Kowalski  
Zakład Postawowych Problemów Telekomunikacji (Z-24)

Instytut Łączności  
04-894 Warszawa, ul. Szachowa 1, (tel. 128-246)

Praca CPBR 8.5 - 98.C

Opiniował: prof. dr inż. Jerzy Dudziewicz

Maszynopis referatu dostarczono dnia: 1990-03-06

W referacie dokonano próby odpowiedzi na pytanie, przy ilu i jakich częstotliwościach pasma przesyłowego należy wyznaczać tłumienności łańcuchów telefonicznych (lub ich ogniw składowych), aby kombinacja liniowa tych punktowych tłumienności była dostatecznie dobrym oszacowaniem zmodyfikowanej tłumienności odniesienia tych łańcuchów (lub ich ogniw), wielkości pasmowej, której definicja matematyczna ma postać całki oznaczonej w granicach pasma częstotliwości akustycznych.

Redaktor: mgr Krystyna Juszkievicz

Montaż tekstu: AUTOR z zastosowaniem edytora WORD-STAR 3.40

---

Dział Ogólnotechniczny Instytutu Łączności  
Warszawa, ul. Szachowa 1

Zam. 98.C.C/96/17/90. Nakład 70 egz.

Zbigniew Kowalski

WYZNACZANIE ZMODYFIKOWANEJ TŁUMIENNOŚCI ODNIESIENIA  
O LOGARYTMONORMALNYM ROZKŁADZIE WAGI

S P I S T R E S C I

	Str.:
1. Wprowadzenie .....	1
2. Współczynniki wagowe punktowych aproksymat wielkości pasmowych .....	4
2.1. Związek współczynników wagowych z momentami rozkładu wagi .....	4
2.2. Momenty rozkładu wagi o postaci logarytmonormalnej ....	5
2.3. Przykładowe wyniki obliczeń współczynników wagowych przy 11 częstotliwościach ustalonych przez ISO .....	6
3. Wskazniki jakości punktowych aproksymat wielkości pasmowych	6
3.1. Wrażliwość .....	7
3.2. Efektywność .....	8
3.3. Obciążenie .....	9
3.4. Ocena jakości 11-punktowych aproksymat wielkości pasmowych przy częstotliwościach ustalonych przez ISO .....	10
4. Optymalizacja punktowych aproksymat wielkości pasmowych ...	11
4.1. Metoda optymalizacji .....	11
4.2. Przykład optymalizacji .....	13
5. Podsumowanie i wnioski .....	14
Wykaz literatury .....	16
Dodatki (wyprowadzenia wzorów) .....	16
D1. Charakterystyka rozkładu normalnego .....	16
D2. Charakterystyka rozkładu logarytmonormalnego .....	20
D3. Wrażliwość i efektywność punktowych aproksymat tłumienności głośności $L_m$ .....	24

Zbigniew Kowalski

## WYZNACZANIE ZMODYFIKOWANEJ TŁUMIENNOŚCI ODNIESIENIA O LOGARYTMONORMALNYM ROZKŁADZIE WAGI

### 1. WPROWADZENIE

Mimo iż w sieciach teletransmisyjnych stopniowo są wprowadzane systemy cyfrowe w miejsce dotychczas stosowanych systemów analogowych, nie uległa dezaktualizacji potrzeba dostatecznie dokładnego charakteryzowania jakości rozmów, realizowanych za pośrednictwem tworzonych w tych sieciach łańcuchów telefonicznych. Zajmująca się zagadnieniami jakości transmisji telefonicznej XII Komisja Studiów CCITT zaleciła zastąpienie, dotychczas stosowanej przy projektowaniu sieci, bardzo niedokładnej miary jakości: klasycznej tłumienności odniesienia RE (= Reference Equivalent \*) przez miarę ulepszoną: zmodyfikowaną tłumienność odniesienia LR (= Loudness Rating \*).

Należy przypomnieć, że tłumienność odniesienia jest skalarną wielkością, charakteryzującą łańcuchy telefoniczne (oraz ogniwa składowe tych łańcuchów) pod względem spadku głośności dźwięków, transmitowanych przez telefon. W odróżnieniu od wielkości klasycznej RE, której wyznaczanie odbywało się wyłącznie na podstawie subiektywnych wrażeń głośności, wielkość zmodyfikowana LR może być wyznaczana również na podstawie obiektywnych pomiarów wielkości akustycznych i elektrycznych \*).

Mimo wydania zalecenia, aby stosować nową miarę, CCITT uznało, że prace nad wielkością LR nie są zakończone: w obecnym okresie studiów (lata 1989+1992) sprecyzowano kilka zagadnień dotyczących tej miary, m.in. Q.15/XII, odnoszące się do algorytmu wyznaczania wielkości LR oraz zasad jej stosowania w sieci. W niniejszym referacie, opracowanym w Zakładzie Podstawowych Problemów Telekomunikacji w ramach CPBR-8.5-98.C, zostaną przedstawione wyniki rozwiązania kilku problemów, powstałych przy analizie zagadnienia Q.15/XII.

Wyznaczaną na podstawie pomiarów obiektywnych wielkość LR określono w zaleceniu P.79 CCITT z roku 1980 [2,t.V] jako różnicę:

$$LR = L_m - L_w \quad (1-1)$$

gdzie:  $L$  jest tłumiennością głośności badanego obiektu, zaś  $L_w$  - tłumiennością głośności wzorca odniesienia IRS (= Intermediate Reference System \*), a więc - z założenia - stałą.

\*) Dokładniejsze informacje podano w [13].

Tłumiennosc glosnosci rozważanego obiektu (linearnego czwórnik: akustycznego, elektrycznego, akustoelektrycznego, elektroakustycznego, o niezmiennych właściwościach transmisyjnych) w pasmie akustycznym o częstotliwościach granicznych  $[f_d, f_g]$  jest określona wzorem:

$$L_m = -10/m \cdot \lg \int_{f_d}^{f_g} 10^{-A(f) \cdot m/10} g(f) df \quad (1-2)$$

gdzie:  $m$  jest współczynnikiem wzrostu glosnosci,  $A(f)$  - częstotliwościową charakterystyką tłumienności tego czwórnik, zaś  $g(f)$  - funkcją gęstości wagi, charakteryzującą zależność glosnosci tonów od ich częstotliwości \*).

Należy zaznaczyć, że CCITT dopuszcza stosowanie pasm akustycznych o kilku różnych szerokościach. W tym opracowaniu będziemy rozważać tylko jeden rodzaj pasma: telefonii naturalnej, o częstotliwościach granicznych  $f_d = 300$  [Hz] i  $f_g = 3400$  [Hz].

W praktyce pomiarowej badania właściwości czwórników są przeprowadzane przy ustalonych  $p$  częstotliwościach  $f_k \in [f_d, f_g]$  (gdzie  $k=1, \dots, p$ ), a wartość tłumienności glosnosci jest wyznaczana na podstawie przybliżonej równości:

$$L_m \approx -10/m \cdot \lg \sum_{k=1}^p G_k \cdot 10^{-A_k \cdot m/10} = L_m \quad (1-3)$$

w której  $A_k = A(f_k)$ , natomiast  $G_k$  są współczynnikami wagowymi.

Określona powyższym wzorem wielkość  $L_m$  będziemy nazywać punktową aproksymatą pasmowej wielkości  $L$  (tłumiennosci glosnosci).

W podręczniku telefonometrii [5], opracowanym przez specjalnie powołaną do tego celu Grupę Roboczą XII Komisji Studiów CCITT w okresie lat 1981+84, stwierdzono, że w przypadku niezbyt dużych zniekształceń tłumieniowych badanych czwórników, ich tłumienność glosnosci można wyznaczać na podstawie przybliżonego związku \*\*):

$$L_m \approx \sum_{k=1}^p G_k \cdot A_k = L_0 \quad (1-4)$$

Należy wyjaśnić, że występujące we wzorze (1-4) wyrażenie, charakteryzujące wielkość  $L_0$ , stanowi granicę, do której dąży wielkość  $L_m$ , gdy wartość współczynnika  $m$  dąży do zera [14, Dod.1]:

$$L_0 = \lim_{m \rightarrow 0} \{L_m\} \quad (1-5)$$

\*) W celu uniknięcia zbyt skomplikowanych związków matematycznych przyjęto, iż ta zależność jest niezmienna w zakresie natężeń dźwięków, które normalnie występują przy połączeniach telefonicznych.

\*\*) Różnice wartości między wielkościami  $L_m$  a  $L_0$ , skalarnie charakteryzującymi czwórnik, zależą od zniekształceń tłumieniowych tego czwórnik w pasmie przesyłowym; analizę tej zależności przedstawiono w [14].

Określona wzorami (1-5) i (1-4) wielkość  $L_0$  będziemy nazywać punktową aproksymatą pasmowej wielkości  $L_0$ , nazwanej w [10] tłumiennością pasmową, a zdefiniowanej jako [14, Dodatek 1]:

$$L_0 = \lim_{m \rightarrow 0} (L_m) = \int_{f_d}^{f_g} A(f) \cdot g(f) df \quad (1-6)$$

We wzmiankowanym podręczniku CCITT [5] zalecono stosowanie zgodnych z ustaleniami ISO (= International Standard Organization) częstotliwości  $f_k$  wyznaczania tłumienności punktowych  $A_k$ , jednocześnie proponując w przypadku pasma telefonicznego stosowanie określonych współczynników wagowych  $G_k$  dla tych tłumienności (patrz tabl.1, rubryka 3). Należy zwrócić uwagę, że wartości tych współczynników zostały ustalone w ten sposób, aby waga punktowej tłumienności, charakteryzującej kraniec pasma telefonicznego (tzn. dla  $f_1$  i  $f_{11}$ ) stanowiła połowę wagi tej tłumienności w środkowej części pasma<sup>1</sup> (tzn. dla:  $f_2, \dots, f_{10}$ ).

Tablica 1

Zestawienie wartości parametrów 11-punktowych aproksymat tłumienności głośności  $L_0$  w pasmie telefonicznym przy częstotliwościach<sup>m</sup> ustalonych przez ISO

Współczynnik wzrostu głośności:  $m = 0,2$

1	2	3	4
k	$f_k$ [Hz] wg ISO *)	$G_k$ wg CCITT **)	$G_k$ wg LN(0;1,15)
1	315	0,05	60,4105
2	400	0,1	-289,2923
3	500	0,1	558,8660
4	630	0,1	-600,6391
5	800	0,1	430,1884
6	1000	0,1	-215,5100
7	1250	0,1	68,0821
8	1600	0,1	-13,3984
9	2000	0,1	2,3790
10	2500	0,1	-0,1529
11	3150	0,05	0,0669
$1 - \Sigma G_k$	-	0	$6,4 \cdot 10^{-10}$
$1 / \Sigma  G_k $	-	1	$4,5 \cdot 10^{-04}$
$W_0$	-	0,32	998,38
$e$	-	0,8869	$9,1 \cdot 10^{-08}$

\*) [2+4, zalecenia: P.76 i P.79]; \*\*) [5, punkt 4.6.3]

W 1986 roku ukazał się dokument roboczy CCITT COM XII-92 [6], w którym dokonano zbiorczego zestawienia wyników badań, mających na celu wyznaczenie rozkładu funkcji wagi  $g(f)$ , charakteryzującej wielkość LR. Stosując przekształcenie zmiennej  $x = \ln(f/f_0)$ , gdzie  $f$  jest częstotliwością odniesienia \*) , na siatkach laplaso-regularnych \*\*) sporządzono wykresy empirycznych dystrybuant rozkładu wagi, uzyskanych doświadczalnie w różnych krajach; okazało się, że wszystkie te wykresy przybliżają linie proste.

Należy zwrócić uwagę, że powyższe informacje zostały przedrukowane w punkcie 4 Suplementu nr 19 tomu V Niebieskiej Księgi CCITT [4], wydanej w 1989 roku; warto podkreślić, że z tych informacji nie wyciągnięto wniosków, dotyczących analitycznej postaci rozkładu wagi  $g(f)$  oraz jej powiązań z współczynnikami wagowymi  $G_k$ .

Jak to wykazano w Dodatkach 1 i 2, uzyskane wykresy stwarzają podstawę do przyjęcia założenia, że rozkład wagi ma postać logarytmnormalną o funkcji gęstości  $g(f; \mu, \sigma)$ , jednoznacznie określonej dwoma parametrami: wartością średnią  $\mu$  oraz odchyleniem standardowym  $\sigma$  zmiennej  $x = \ln(f/f_0)$ . Sporządzone wykresy umożliwiają również dokonanie oszacowań wartości tych parametrów metodą graficzną \*\*, przedstawioną na rys.1 (str.19). W zależności od kraju, w którym były przeprowadzane badania rozkładu wagi, podaną metodą otrzymano oszacowania wartości parametru  $\mu$  zawarte w przedziale od  $-0,2$  do  $+0,1$ , natomiast wartości parametru  $\sigma$  - prawie jednakowe i wynoszące około 1,15.

W publikacji [12] z 1983 roku wykazałem, że przy ustalonym rozkładzie wagi, tzn. przy danej funkcji  $g(f)$ , wartości współczynników wagowych  $G_k$  są jednoznacznie określone przez częstotliwości  $f_k$  wyznaczania  $k$  tłumiennosci punktowych  $A_k$ . W tym referacie przedstawiam metodę i przykładowe wyniki obliczeń tych współczynników przy ustalonych przez ISO częstotliwościach  $f_k$  w przypadku logarytmnormalnego rozkładu wagi o danych parametrach  $(\mu, \sigma)$ . Zaprezentuję również metodę i przykładowe wyniki obliczeń optymalnych częstotliwości  $f_k$  wyznaczania tłumiennosci punktowych  $A_k$ , tzn. częstotliwości, dla których uzyskuje się aproksymację naj lepszą w sensie uprzednio wprowadzonego kryterium jakości.

## 2. WSPÓŁCZYNNIKI WAGOWE PUNKTOWYCH APROKSYMAT WIELKOŚCI PASMOWYCH

### 2.1. Związek ws czynnikiw wagowych z momentami rozkładu wagi

W [12] wykazano, że jeśli funkcja  $g(f)$  gęstości wagi zostanie scharakteryzowana poprzez momenty zwyczajne  $m_r$  jej unormowanego rozkładu w pasmie  $[f_d, f_g]$ , gdzie  $r$  jest rzędem momentu:

$$m_r = \int_{f_d}^{f_g} f^r g(f) df \quad (2-1)$$

to między współczynnikami wagowymi  $G_k$   $p$ -punktowych aproksymat wielkości pasmowej ( $L_0$  albo  $L_m$ ) a częstotliwościami  $f_k$  wyzna-

\*) Wg obowiązujących zaleceń CCITT [4]  $f_0 = 1000$  [Hz].

\*\*) patrz Dodatek 1.3.



czania tłumienności punktowych  $A_k$  zachodzi następujący związek:

$$G_k = \frac{\sum_{n=0}^{p-1} F_{n/k} \cdot m_{p-n-1}}{\sum_{n=0}^{p-1} F_{n/k} \cdot f_k^{p-n-1}} \quad (2-2)$$

Występujące w powyższym wzorze współczynniki:

$$F_{n/k} = (-1)^n \sum_{\substack{(p-1) \\ j_i = \{1, \dots, p\}/k}} \prod_{i=1}^n f_{j_i} \quad (2-3)$$

są sumami  $\binom{p-1}{n}$  iloczynów, stanowiących kombinacje bez powtórzeń  $n$  elementów  $n$  z  $(p-1)$ -elementowego zbioru częstotliwości  $\{f_j\}$ , gdzie  $j \neq k$ , przyjmując wszystkie pozostałe wartości  $j=1, \dots, p$ .

Należy podkreślić, że przy unormowanej w paśmie  $[f_d, f_g]$  funkcji  $g(f)$  gęstości wagi, tzn. gdy jest spełniony warunek:

$$\int_{f_d}^{f_g} g(f) df = 1 \quad (2-4)$$

współczynniki wagowe  $G_k$  też są unormowane, tzn. zachodzi:

$$\sum_{k=1}^p G_k = 1 \quad (2-5)$$

## 2.2. Momenty rozkładu wagi o postaci logarytmonormalnej

Przy obliczaniu współczynników wagowych  $G_k$  punktowych aproksymat wielkości pasmowych zachodzi konieczność wyznaczania wartości określonych wzorem (2-1) momentów zwyczajnych rozkładu wagi

W przypadku logarytmonormalnego rozkładu wagi o parametrach  $(\mu, \sigma)$ , jej funkcja gęstości (określona dla:  $f > 0$ ) ma postać (patrz Dodatek 2):

$$g(f) = 1/f\sigma\sqrt{2\pi} \cdot \exp\{-\frac{1}{2}[\ln(f/f_0) + \mu]^2/\sigma^2\} \quad (2-6)$$

Momenty zwyczajne rzędu  $r$  tego rozkładu, obustronnie uciętego i unormowanego w przedziale  $[f_d, f_g]$  wynoszą (patrz Dod.2):

$$m_r = m_{\omega r} \cdot \frac{\Phi(y_g - r\sigma) - \Phi(y_d - r\sigma)}{\Phi(y_g) - \Phi(y_d)} \quad (2-7)$$

gdzie:

$$m_{\omega r} = f_0^r \cdot \exp(r\mu + \frac{1}{2}r^2\sigma^2) \quad (2-8)$$

są momentami zwyczajnymi rzędu  $r$  rozkładu nieuciętego, natomiast  $\Phi(y)$  są wartościami dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego, określonymi w punktach  $y$ , przy czym:

$$y_g = [\ln(f_g/f_0) - \mu]/\sigma \quad (2-9)$$

natomiast:

$$y_d = [\ln(f_d/f_0) - \mu]/\sigma \quad (2-10)$$

### 2.3. Przykładowe wyniki obliczeń współczynników wagowych przy 11 częstotliwościach ustalonych przez ISO

W rubryce 4 tabl.1 zestawiono wyniki obliczeń parametrów aproksymat wielkości pasmowej o logarytmnormalnej funkcji wagi  $g(f; \mu, \sigma)$ , przy założeniu, że wartość średnia rozkładu wagi wynosi  $\mu = 0$ , a odchylenie standardowe  $\sigma = 1,15$ . Należy zwrócić uwagę na ujemne znaki i bardzo duże wartości bezwzględne współczynników  $G$ . Jak wiadomo z teorii metod numerycznych [7], w takich przypadkach suma (tzn. punktowa aproksymata  $\bar{L}$ ) może nie być zbieżna do całki (tzn. do wielkości pasmowej  $L$ ).

## 3. WSKAZNIKI JAKOŚCI PUNKTOWYCH APROKSYMAT WIELKOŚCI PASMOWYCH

Przy intuicyjnym podejściu do zagadnienia, punktowe oszacowania wielkości pasmowych powinny być tym dokładniejsze, im większa jest liczba  $p$  punktów aproksymacji oraz im te punkty (częstotliwości  $f_k$ , gdzie  $k=1, \dots, p$ ) są "lepiej" rozmieszczone w przedziale aproksymacji (pasmie częstotliwości  $[f_0, f_p]$ ). Trzeba zatem ustalić miarę jakości wprowadzonych wyżej punktowych aproksymat wielkości pasmowych, a następnie określić, przy ilu i jakich częstotliwościach pasma należy wyznaczać tłumienności punktowe dowolnego czwórnik, aby uzyskać aproksymaty spełniające założone wymagania jakościowe.

Przed ustaleniem tej miary jakości przyjmijmy założenie, że występujące we wzorach (1-3) i (1-4) wielkości  $A_k$  ( $k=1, \dots, p$ ) są wynikami pomiarów tłumienności punktowych czwórnik przy częstotliwościach  $f_k$ , przy czym pomiary te są obarczone tylko błędami losowymi o odchyleniu standardowym  $\beta$ , którego wartość jest jednakowa dla wszystkich częstotliwości; błędy systematyczne nie występują. Oznacza to założenie, że wielkości  $A_k$  są zmiennymi losowymi o wartościach oczekiwanych:  $E\{A_k\} = A(f_k)$  i o odchyleniach standardowych;  $\beta = \sqrt{V\{A_k\}} = \text{const.}$ , gdzie symbol  $V\{A_k\}$  oznacza wariancję odpowiedniej zmiennej. Ponieważ określone wzorami (1-3) oraz (1-4) punktowe aproksymaty pasmowych wielkości (1-2) oraz (1-6) są funkcjami zmiennych losowych  $A_k$ , więc one też są zmiennymi losowymi. Określone wzorami (1-3) oraz (1-4) zmienne losowe:  $\bar{L}$  oraz  $\bar{L}^m$  są estymatorami liczb:  $L$  oraz  $L^m$ , skalarne charakteryzujących rozważane czwórnik. W<sup>m</sup> teorii statystyki są stosowane rozmaite pojęcia, charakteryzujące jakość estymatorów [9, roz.13], m.in. obciążenie i efektywność. Analogiczne pojęcia wprowadzono w [11] jako miary jakości punktowych aproksymat wielkości pasmowych.

## 3.1. Wrażliwość

Jednakże obecnie autor jest zdania, aby stosować jako decyzyjne kryterium jakości aproksymat wielkość ściśle związaną z efektywnością, charakteryzującą wrażliwość aproksymaty na losowe błędy wyznaczania tłumienności punktowych. Wrażliwość  $W$  określono w [15] jako stosunek błędu standardowego  $\beta_L$  p-punktowej aproksymaty odpowiedniej wielkości pasmowej ( $L_0$  albo  $L_0$ ) do błędu standardowego  $\beta$  wyznaczania tłumienności punktowych  $A_k$ ; mianowicie:

$$W = \left[ \frac{V(L_0)}{V(A_k)} \right]^{1/2} = \frac{\beta_L}{\beta} \quad (3-1)$$

Wrażliwość p-punktowej aproksymaty tłumienności pasmowej  $L_0$  wyraża się wzorem [15,16]:

$$W_0 = \left[ \frac{p}{\sum_{k=1}^p G_k^2} \right]^{1/2} = \left[ 1/p + \mathcal{S}^2 \right]^{1/2} \quad (3-2)$$

gdzie:

$$\mathcal{S}^2 = \frac{p}{\sum_{k=1}^p (G_k - \bar{G})^2} \quad (3-3)$$

jest sumą kwadratów odchylen współczynników wagowych  $G_k$  od wartości średniej  $\bar{G}$ , która - ze względu na związek (2-4)  $\frac{1}{k}$  ma ustaloną wartość dla każdej liczby  $p$  punktów aproksymacji i wynosi:

$$\bar{G} = 1/p \quad (3-4)$$

W przypadku gdy wszystkie współczynniki wagowe  $G_k$  są jednokowe, tzn. równe  $1/p$ , zachodzi:  $\mathcal{S}^2 = 0$ , a wówczas wrażliwość  $W_0$  osiąga wartość minimalną:

$$\min \{W_0\} = 1/\sqrt{p} \quad (3-5)$$

Wraz ze wzrostem sumy kwadratów  $\mathcal{S}^2$  wrażliwość  $W_0$  rośnie. Należy zwrócić uwagę, że wówczas gdy:

$$\mathcal{S}^2 > 1 - 1/p \quad (3-6)$$

wrażliwość  $W$  staje się większa od jedności. W takim przypadku wartość błędu standardowego  $\beta_L$  aproksymaty jest większa (niekiedy nawet znacznie!) od wartości błędu standardowego  $\beta$  tłumienności punktowych  $A_k$ . Intuicyjnie to zjawisko nie jest oczywiste dla techników, chociaż jest ono dobrze znane matematykom-numerykom [7].

Przeprowadzona w [15] analiza wykazała, że wrażliwość  $W$  punktowej aproksymaty tłumienności głośności  $L_0$  nie jest wielkością jednoznacznie określoną przez parametry:  $p$  i  $(f_k, G_k)$  tej aproksymaty, ponieważ zależy ona również od zniekształceń tłumieniowych (dla częstotliwości  $f_k, k=1, \dots, p$ ) badanych czwórników (patrz Dodatek 3). Jednakże istnieje możliwość określenia granic przedziału, w którym zawarta jest wartość tej wielkości, a miano-

wicie:

$$W_0 \leq W_m \leq W_g \quad (3-7)$$

Górna granica tego przedziału wynosi [15]:

$$W_g = \frac{\sqrt{\sum [G_k \cdot \exp(-c \cdot m \cdot D_g \cdot u_k^2)]^2}}{\sum G_k \cdot \exp(-c \cdot m \cdot D_g \cdot u_k^2)} \quad (3-8)$$

przy czym sumowanie przebiega po  $k=1, \dots, p$ .

Występujące w powyższym wzorze symbole mają następujące znaczenia:

$$c = \ln(10)/10 \quad (3-9)$$

$$u_k = \frac{\ln(f_k/f_0)}{\ln(f_g/f_0)} \quad (3-10)$$

natomiast:

$$D_g = A_g - A_0 \quad (3-11)$$

oznacza założoną górną granicę wartości zniekształceń tłumieniowych dla górnej częstotliwości  $f_g$  pasma przesyłowego (względem częstotliwości odniesienia  $f_0$ ) czwórników, przewidzianych do badań.

### 3.2. Efektywność

Efektywnością  $p$ -punktowej aproksymaty  $L$  wielkości pasmowej  $L$  nazwano w [11] wielkość:

$$e = \frac{\min V\{L_0\}}{V\{L\}} \quad (3-12)$$

określoną jako stosunek wariancji: minimalnej, charakteryzującej najlepszą  $p$ -punktową aproksymatę tłumienności pasmowej  $L$  do rzeczywiście występującej, charakteryzującej stosowaną w praktyce  $p$ -punktową aproksymatę odpowiedniej wielkości pasmowej ( $L_0$  albo  $L$ ).

Z<sup>m</sup>(3-1) wynika, że  $V\{L\} = \beta^2 W^2$ , a uwzględniając (3-5) mamy:  $\min V\{L_0\} = \beta^2/p$ . Podstawiając do (3-12) otrzymujemy następujący związek efektywności z wrażliwością  $p$ -punktowej aproksymaty:

$$e = 1/(pW^2) \quad (3-13)$$

Podstawiając (3-2) do (3-12) uzyskujemy wyrażenie na efektywność punktowych aproksymat tłumienności pasmowej  $L_0$ :

$$e_0 = \left[ p \cdot \sum_{k=1}^p G_k^2 \right]^{-1} = \left[ 1 + p \cdot \$^2 \right]^{-1} \quad (3-14)$$

gdzie  $\$^2$  jest określoną wzorem (3-3) sumą kwadratów odchylen współczynników wagowych  $G_k$  od ich wartości średniej:  $\bar{G} = 1/p$ .

Przy dowolnej (ale ustalonej) liczbie  $p$  punktów aproksymacji maksymalną wartość efektywności:  $e_0 = 1$  uzyskuje się wówczas, gdy wartości wszystkich współczynników wagowych są jednakowe (a więc równe:  $G_k = 1/p$ ; natomiast minimalną:  $e_0 = 0$  - wówczas, gdy suma kwadratów  $\$^2$  dąży do nieskończoności. Gdy  $\$^2$  rośnie, efektywność  $e_0$  maleje. Efektywność  $e_0$  jest wielkością unormowaną, tzn. jej wartości są zawarte w przedziale  $[0;1]$ .

Podobnie jak wrażliwość  $W$ , efektywność  $e_0$  punktowej aproksymaty tłumienności głośności  $L_m$  nie jest wielkością jednoznacznie określoną przez parametry:  $m$ ,  $p$  i  $\{f_k, G_k\}$  tej aproksymaty, ponieważ zależy ona również od zniekształceń tłumieniowych (dla częstotliwości  $f_k$ ,  $k=1, \dots, p$ ) badanych czwórników (patrz Dodatek 3). Jednakże istnieje możliwość określenia granic przedziału, w którym zawarta jest wartość tej wielkości, a mianowicie:

$$e_d \leq e_m \leq e_0 \quad (3-15)$$

przy czym dolna granica tego przedziału wynosi:

$$e_d = 1/(pW_g^2) \quad (3-16)$$

gdzie:  $W_g$  jest określone wzorem (3-8).

### 3.3. Obciążenie

Obciążeniem  $p$ -punktowej aproksymaty  $L$  wielkości pasmowej  $L$  została nazwana wielkość:

$$b = E(L) - L \quad (3-17)$$

charakteryzująca błąd systematyczny (inaczej zwany błędem poprawności), popełniany przy ocenie wartości odpowiedniej wielkości pasmowej ( $L_0$  albo  $L_m$ ) na podstawie jej  $p$ -punktowej aproksymaty.

Jak wykazano w [11], obciążenie  $p$ -punktowej aproksymaty tłumienności pasmowej  $L_0$  można określić na podstawie następującej nierówności:

$$|b_0| \leq M_p \cdot (1/p!) \cdot \left| \sum_{n=0}^p F_n \cdot m_{p-n} \right| \quad (3-18)$$

Występujący w powyższym wzorze symbol  $M$  oznacza moduł górnej granicy wartości  $p$ -tej pochodnej częstotliwościowej charakterystyki tłumienności  $A(f)$  w pasmie  $[f_d, f_g]$  rozważanego czwórnika, natomiast współczynniki:

$$F_n = (-1)^n \sum_{\substack{j_1=1, \dots, p \\ j_i=1, \dots, p}} \prod_{i=1}^n f_{j_i} \quad (3-19)$$

są sumami  $\binom{p}{n}$  iloczynów, stanowiących kombinacje bez powtórzeń

n elementów z p-elementowego zbioru częstotliwości  $\{f_j\}$ , gdzie  $j=1, \dots, p$ , zaś  $m_j$  są określonymi wzorem (2-1) momentami zwy-  
czajnymi rzędu  $r$  ( $r=p-n$ ) rozkładu wagi w pasmie  $[f_d, f_g]$ .

Obciążenie p-punktowej aproksymaty tłumienności głośności  $L_m$  można określić na podstawie przybliżonej równości:

$$|b_m| \approx 10/m \cdot \lg \left[ 1 + |b_0| \cdot \dot{V} \right] \quad (3-20)$$

gdzie:

$$\dot{V} = 10^{+L_m \cdot m/10} \quad (3-21)$$

a  $L_m$  jest uzyskanym w wyniku pomiaru czwórnika oszacowaniem wielkości, wyrażonej wzorem (1-3).

Należy zwrócić uwagę, że określone wzorem (3-17) obciążenie punktowych aproksymat wielkości pasmowych jest wielkością zależną od właściwości rozpatrywanych czwórników - przy niżej danej wartości współczynnika  $M_p$  nie może więc być wyznaczone.

Z tego względu wprowadzono nową wielkość nazwaną w [12] niepoprawnością, zdefiniowaną jako stosunek:  $|b|/M_p$ , którego wartość liczbowa jest jednoznacznie określona przez parametry aproksymaty tłumienności pasmowej, mianowicie:

$$|b_0|/M_p \leq (1/p!) \cdot \left| \sum_{n=0}^p F_n \cdot m_{p-n} \right| \quad (3-22)$$

### 3.4. Ocena jakości 11-punktowych aproksymat wielkości pasmowych przy częstotliwościach ustalonych przez ISO

W dolnej części rubr. 4 tabl. 1 zestawiono wartości parametrów, charakteryzujących jakość wyznaczonej w punkcie 2.3. aproksymaty tłumienności pasmowej o logarytmnormalnej funkcji wagi  $g(f; \mu, \sigma)$ , przy założeniu, że wartość średnia rozkładu wagi wynosi  $\mu = 0$ , a odchylenie standardowe:  $\sigma = 1,15$ .

Parametr  $(1-\Sigma G_k)$  charakteryzuje dokładność obliczeń numerycznych przy wyznaczaniu wartości współczynników  $G_k$ . Parametr  $(1/\Sigma |G_k|)$  jest miarą zbieżności sumy, którą stanowi aproksymata, do całości, którą reprezentuje wielkość pasmowa. Jest znamienne, że w rozważanym przypadku ta miara zbieżności jest bliska zeru. Natomiast wrażliwość  $W$ , wyznaczonej aproksymaty jest bardzo duża - błąd standardowy wielkości  $L_m$  jest około 1000 razy większy (!) od błędu standardowego wyników pomiarów tłumienności punktowych  $A_k$ , będących podstawą do obliczeń wartości  $L_m$ . Dlatego aproksymata wielkości pasmowej ( $L_m$  albo  $L_p$ ) o logarytmnormalnej funkcji wagi  $g(f; \mu=0, \sigma=1,15)$ , obliczana na podstawie jedenastu punktowych tłumienności  $A_k$ , wyznaczanych dla częstotliwości ustalonych przez ISO, jest zła.

Należy zwrócić uwagę, że wyszczególnione w rubryce 3 tabl. 1 referatu współczynniki wagowe  $G_k$  ( $k=1, \dots, p$ ) punktowych aproksymat tłumienności pasmowej nie są związane zależnościami podanymi w pkt 2. z logarytmnormalną funkcją wagi  $g(f; \mu=0, \sigma=1,15)$ . Oznacza

BIBLIOTEKA

Instytutu Łączności

Nr 5-10055

to, że w CCITT wysunięto propozycję stosowania - bardzo dobrej zresztą (według kryterium wartości  $W$ , bliskiej minimalnej,  $1/\sqrt{11} \approx 0,3015$ ) - skalarnej 11-punktowej miary tłumienności łańcuchów telefonicznych, która niestety jest niezgodna z koncepcyjnie pierwotną miarą pasmową, o doświadczalnie wyznaczonym logarytm-normalnym rozkładzie wagi.

Powstaje zatem problem znajdowania wysokiej jakości zgodnych aproksymat wielkości pasmowej, charakteryzujących się dostatecznie małą wrażliwością (o wartości istotnie mniejszej od jedności).

#### 4. OPTIMALIZACJA PUNKTOWYCH APROKSYMAT WIELKOŚCI PASMOWYCH

Optymalizacja ma na celu wyznaczenie takich częstotliwości  $f_k$  ( $k=1, \dots, p$ ) w pasmie  $[f_1, f_p]$ , aby - przy minimalnej liczbie  $p$  tych częstotliwości - uzyskać dostatecznie małą wrażliwość  $W$  punktowej aproksymaty wielkości pasmowej na losowe błędy danych tłumienności punktowej.

##### 4.1. Metoda optymalizacji

Przyjmijmy, że są dane wartości parametrów  $(\mu, \sigma)$  logarytm-normalnego rozkładu wagi wielkości pasmowej ( $L$  albo  $L_0$ ) oraz maksymalna wartość  $W^*$  wrażliwości poszukiwanej aproksymaty.

W celu wyznaczenia niezbędnej liczby  $p$  punktów aproksymacji wykorzystamy związek (3-5), z którego wynika, że:

$$p \geq (1/W^*)^2 \quad (4-1)$$

i wstępnie przyjmijmy, że:

$$p \approx (1/W^*)^2 + \frac{1}{2} \quad (4-2)$$

Po wyznaczeniu optymalnych  $p$  częstotliwości  $f_k$  ( $k=1, \dots, p$ ) metodą podaną niżej, obliczamy parametry otrzymanej aproksymaty, sprawdzając, czy został spełniony warunek:

$$W \leq W^* \quad (4-3)$$

jeśli nie - przyjmujemy nową wartość liczby punktów aproksymacji:

$$p' = p + 1 \quad (4-4)$$

i powtarzamy proces optymalizacji częstotliwości  $f_k$ , sprawdzając warunek (4-3).

Przy ustalonej liczbie  $p$  punktów aproksymacji, istota metody obliczeń optymalnych częstotliwości  $f_k$  polega na określeniu warunków, przy których występuje minimum wrażliwości  $W$  aproksymaty tłumienności pasmowej, wrażliwości wyrażonej wzorem (3-2), tzn.:

$$W_0 = \sqrt{1/p + \mathcal{S}^2} \quad (4-5)$$

gdzie:

$$\mathcal{S}^2 = \sum_{k=1}^p (G_k - 1/p)^2 \quad (4-6)$$

Z (4-5) widać, że przy ustalonej liczbie  $p$  punktów aproksymacji minimum wrażliwości  $W$  zachodzi wówczas, gdy występuje minimum wielkości  $\mathcal{S}^2$ . Należy przy tym wyróżnić dwie możliwości: I - gdy  $\mathcal{S}^2 = 0$  oraz II - gdy  $\mathcal{S}^2 > 0$ .

Przypadek I może wystąpić wtedy, gdy dla każdego  $k = 1, \dots, p$  jednocześnie zachodzi równość:

$$G_k = 1/p \quad (4-7)$$

W tym przypadku wartości optymalnych częstotliwości  $f$ , można wyznaczyć metodami algebraicznymi podanymi w [12], jako pierwiastki układu  $p$  równań, powstałych przez podstawienie (2-2) do (4-7). Stawiając dodatkowy warunek: minimizacji obciążenia aproksymaty (patrz pkt 3.3), powyższy układ równań można sprowadzić do jednego równania  $p$ -tego stopnia o następującej postaci [12]:

$$\sum_{j=0}^p a_j \cdot f^j = 0 \quad (4-8)$$

którego współczynniki wynoszą:  $a_0 = 1$  oraz (dla  $j=1, \dots, p$ ):

$$a_j = - (a_0 m_j + a_1 m_{j-1} + a_2 m_{j-2} + \dots + a_{j-1} m_1) \cdot p / j \quad (4-9)$$

przy czym  $m_r$  ( $r=1, \dots, j$ ) jest określone wzorem (2-7).

Jeżeli dla danej liczby  $p$  istnieje  $p$  pierwiastów rzeczywistych równania (4-8), to wyznaczają one częstotliwości teoretycznie optymalne, dla których zachodzi równość (4-7), a więc  $p$ -punktowa aproksymata tłumienności pasmowej ma efektywność  $e_0$  (patrz pkt 3.2) równą jedności. Wartości tych optymalnych częstotliwości oznaczymy symbolem  $\{f_k\}$ ,  $k=1, \dots, p$ .

Jeżeli dla danej liczby  $p$  nie istnieje  $p$  pierwiastów rzeczywistych układu  $p$  równań, powstałych przez podstawienie (2-2) do (4-7), to nie istnieją  $p$ -punktowe aproksymaty tłumienności pasmowej o efektywności  $e_0$  równej jedności, a więc przypadek I nie zachodzi.

Rozważmy obecnie przypadek II. Ponieważ wielkość:

$$\mathcal{S}^2 = \mathcal{S}^2(f_1, f_2, \dots, f_p; \mu, \sigma) \quad (4-10)$$

jest ciągłą funkcją  $p$  argumentów  $\{f_k\}$ , więc minimum tej wielkości może wystąpić tylko w takim punkcie  $f_k$  (przestrzeni  $p$ -wymiarowej), w którym dla każdego (wymiaru)  $k = 1, \dots, p$  jest spełniony warunek:

$$\frac{\partial \mathcal{S}^2}{\partial f_k} = 0 \quad (4-11)$$



Ponieważ:

$$\frac{\partial \mathcal{G}^2}{\partial f_k} = 2 \sum_{j=1}^p (G_j - 1/p) \frac{\partial G_j}{\partial f_k} \quad (4-12)$$

więc w rozważanym przypadku wartości optymalnych częstotliwości  $f_k$  można by wyznaczyć jako pierwiastki układu  $p$  równań, powstałych przez podstawienie wyrażenia (2-2) do poniższej równości:

$$\sum_{j=1}^p (G_j - 1/p) \frac{\partial G_j}{\partial f_k} = 0 \quad (4-13)$$

gdzie  $k = 1, \dots, p$ . Niestety, takiego układu równań nie umiemy rozwiązać; jak dotychczas istnieje jedynie możliwość poszukiwania częstotliwości optymalnych iteracyjnymi metodami numerycznymi.

W praktyce, dla wyznaczenia optymalnych częstotliwości  $f_k$  ( $k=1, \dots, p$ ) tworzących  $p$ -punktową aproksymatę o wymaganej wrażliwości, najpierw - stosując metodę algebraiczną - dokonujemy próby obliczeń częstotliwości "teoretycznie" optymalnych, dla których aproksymata wykazuje teoretycznie minimalną wrażliwość równą:  $W_0 = 1/\sqrt{p}$ , a następnie - jedną z metod iteracyjnych - obliczamy częstotliwości "praktycznie" optymalne, tzn. pożądane ze względów technicznych. Oczywiście, jeśli dla danej liczby  $p$  nie istnieje  $p$ -punktowa aproksymata tłumienności pasmowej o efektywności  $e$  równej jedności, wówczas metodą algebraiczną nie można uzyskać rozwiązań rzeczywistych, a wtedy trzeba stosować iteracyjne metody optymalizacji, które są zawsze skuteczne (choć czasochłonne). Metody te umożliwiają znajdowanie takiego  $p$ -wymiarowego wektora  $\{f_k\}$  argumentów funkcji  $\mathcal{G}^2(\{f_k\})$ , który minimizuje jej wartość na zbiorze wartości  $\{f_k\}$  dopuszczalnych albo preferowanych ze względów technicznych, przy czym z reguły stawia się wymagania, aby dla określonego  $k$  ( $\approx p/2$ ) był spełniony warunek:

$$f_k = f_0 \quad (4-14)$$

#### 4.2. Przykład optymalizacji

Załóżmy, że są dane wartości parametrów:  $\mu = 0$  i  $\sigma = 1,15$  oraz maksymalna wartość wrażliwości aproksymaty:  $W^* = 0,525$ .

Na podstawie wzoru (4-2) szacujemy wartość liczby  $p$  i przyjmujemy, że  $p = 4$ .

Następnie, na podstawie wzorów podanych w pkt.2.2, wyznaczamy momenty  $m_1, m_2, m_3, m_4$ , a na podstawie wzoru (4-9) - współczynniki:  $a_1, a_2, a_3, a_4$  równania (4-8). Wyniki rozwiązania:  $\{f_k\}$  tego równania zebrano w rubryce 2 tabl.2. W dolnej części tej rubryki podano również wartości wskaźników jakościowych wyznaczonej optymalnej aproksymaty, m.in. wrażliwości:  $W = 0,5$  - najniższą z możliwych, a także efektywności:  $e = 1$  - najwyższą z możliwych.

Na wstępie drugiej fazy optymalizacji wprowadzamy dodatkowe założenia, np. ustalamy, że:  $f_3 = f_0$  oraz że preferowany zbiór pozostałych trzech częstotliwości powinien zawierać tylko wartości będące wielokrotnością kwantu:  $q = 1$  [Hz] lub nawet 10 [Hz].

Wyniki iteracyjnej optymalizacji 4-punktowej aproksymaty, spełniającej wszystkie wyżej przyjęte założenia, zestawiono w rubrykach 3, 4 i 5 tabl.2. Warto tutaj zwrócić uwagę na fakt, że najczulszym wskaźnikiem jakości aproksymat (przy ustalonej liczbie  $p$  punktów aproksymacji) jest efektywność  $e$ .

Ostatnia faza obliczeń polega na wyznaczeniu górnej granicy wartości zniekształceń tłumieniowych  $D$ , czwórników, poniżej której aproksymata tłumienności głośności  $L^g$  o parametrach podanych w rubryce 5 i przy określonej wartości  $m$  współczynnika  $m$  będzie spełniać warunek (4-3), tzn.:  $W \leq W^*$ . Przyjmując wartość:  $m = 0,2$  oraz podane w rubryce 5 wartości:  $f_L$  i  $G_L$ , na podstawie zależności odwrotnej do określonej wzorem (3-8)<sup>k</sup> otrzymujemy:  $D \leq 28$  [dB].

Oznacza to w praktyce, że dopuszczalna wartość wrażliwości aproksymat tłumienności głośności  $L^m$  nie zostanie przekroczona przy pomiarach dowolnego rodzaju ogni w sieci telefonicznej, jak również krótkich zestawów tych ogni. Natomiast w przypadku pomiarów wieloogniowych łańcuchów telefonicznych, tworzonych w sieci analogowej z przestrzenną komutacją łączy, wrażliwość tych aproksymat będzie nieco większa: np. przy  $D_g = 60$  [dB] wartość  $W_g \approx 0,58$ .

Oczywiście, podane wartości wrażliwości dotyczą również ocen zmodyfikowanej tłumienności odniesienia LR, wyznaczanej na podstawie ocen wielkości  $L^m$ .

## 5. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Wykorzystując podaną w dokumentach CCITT: [6] z r.1986 i [4] z r.1989 informację o rozkładzie wagi, charakteryzującej wielkość zwaną tłumiennością głośności, przedstawiono zarys metody wyznaczania optymalnych oszacowań tej wielkości pasmowej na podstawie wyników punktowych pomiarów tłumienności ogni w sieci telefonicznej i tworzonych z tych ogni łańcuchów.

Wykazano, że liczba i wartości częstotliwości, przy których powinny być przeprowadzane te punktowe pomiary, muszą być specjalnie dobrane w celu uzyskania dostatecznie dokładnych oszacowań tłumienności głośności  $L^m$ , a zatem i zmodyfikowanej tłumienności odniesienia LR, różniącej się od wielkości  $L^m$  o stałą  $L^m$ .

Jednakże sformułowanie konkretnych propozycji co do liczby i wartości częstotliwości w pasmie telefonicznym, które powinny być w praktyce stosowane do pomiarów ogni w sieci telefonicznej, wymaga uprzedniego uzgodnienia na forum CCITT odpowiednich założeń, niezbędnych do realizacji właściwych obliczeń. Założenia te można ograniczyć do ustalenia dwóch liczb: wartości średniej  $\mu$  rozkładu wagi oraz wartości dopuszczalnej wrażliwości  $W^m$  punktowych aproksymat tłumienności głośności na losowe błędy niepewności, występujące przy punktowych pomiarach tłumienności.

Ze względu na możliwość wykorzystania informacji zawartych w wyżej przedstawionym referacie przez XII Komisję Studiów CCITT, autor uważa za celowe wystąpienie polskiej administracji łączności z odpowiednią kontrybucją dla CCITT.

Tablica 2

Zestawienie wartości parametrów 4-punktowych aproksymat wielkości pasmowej L o logarytmnormalnym rozkładzie wagi w zakresie pasma telefonii naturalnej

1	2		3	
k	$\bar{f}_k$ [Hz]	$\bar{G}_k$	$\dot{f}_k$ [Hz]	$G_k$
1	509,3829...	0,25	465,2714...	0,2500004
2	775,7368...	0,25	923,9398...	0,2499953
3	1107,598...	0,25	1000	0,2500045
4	2546,276...	0,25	2549,783...	0,2499999
$1-\Sigma G_k$	-	0	-	$3,1 \cdot 10^{-15}$
$1/\Sigma  G_k $	-	1	-	1
$W_0$	-	0,5	-	0,500000
e	-	1	-	$1 - 2 \cdot 10^{-10}$
$ b_0 /M_p$	-	$\leq 1,2 \cdot 10^{-02}$	-	$\leq 1,1 \cdot 10^{-02}$

1	4		5	
k	$\dot{f}_k$ [Hz] (gdy $q=1$ )	$G_k$	$\dot{f}_k$ [Hz] (gdy $q=10$ )	$G_k$
1	465	0,2499639	470	0,2554914
2	924	0,2484131	920	0,2137475
3	1000	0,2517143	1000	0,2809168
4	2550	0,2499088	2550	0,2498443
$1-\Sigma G_k$	-	$2,8 \cdot 10^{-15}$	-	$1,1 \cdot 10^{-15}$
$1/\Sigma  G_k $	-	1	-	1
$W_0$	-	0,500006	-	0,502295
e	-	$1 - 2 \cdot 10^{-05}$	-	$1 - 1 \cdot 10^{-03}$
$ b_0 /M_p$	-	$\leq 1,1 \cdot 10^{-02}$	-	$\leq 1,1 \cdot 10^{-02}$

## WYKAZ LITERATURY

1. Aitchison J., Brown J.: The Lognormal Distribution. Cambridge, Academic Press, 1957.
2. CCITT: Yellow Book. ITU, Geneva 1981.
3. CCITT: Red Book. ITU, Geneva 1985.
4. CCITT: Blue Book. ITU, Geneva 1989.
5. CCITT: Handbook on Telephonometry. ITU, Geneva 1987.
6. CCITT: Contribution COM XII - 92 (period 1985/88).
7. Davis P., Rabinowitz P.: Methods of numerical integration. Orlando, Academic Press, 1984.
8. Firkowicz Sz.: Statystyczne badanie wyrobów. WNT, Warszawa 1970.
9. Fisz M.: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1969.
10. Kowalski Z.: Pasmowe tłumienności czwórników i ortotelefoniczna tłumienność odniesienia. Rozprawy Elektrotechniczne, zeszyt 3/4, 1982.
11. Kowalski Z.: Zasady określania tłumienności pasmowej na podstawie danych punktowych. Rozprawy Elektrotechniczne, zeszyt 1, 1983.
12. Kowalski Z.: Punktowe aproksymaty tłumienności pasmowej. Rozprawy Elektrotechniczne, zeszyt 2, 1984.
13. Kowalski Z.: Ewolucja tłumienności odniesienia jako miary jakości łańcuchów telefonicznych. Referaty Problemowe Instytutu Łączności, zeszyt 88, 1988.
14. Kowalski Z.: Zmodyfikowana tłumienność odniesienia kanałów i łańcuchów telefonicznych. Referaty Problemowe Instytutu Łączności, zeszyt 90, 1988.
15. Kowalski Z.: Błędy wyznaczania zmodyfikowanej tłumienności odniesienia. Referaty Problemowe Instytutu Łączności, zeszyt 92, 1988.
16. Kowalski Z.: Analiza właściwości zmodyfikowanej tłumienności odniesienia. Prace Instytutu Łączności, zeszyt 97 (w druku).

## D O D A T K I

## DODATEK 1. CHARAKTERYSTYKA ROZKŁADU NORMALNEGO

## D1.1. Dwuparametrowy rozkład normalny

Ciągła cecha mierzalna  $x$  ma rozkład normalny, jeśli jej gęstość wyraża się wzorem:

$$h(x) = 1/\sigma\sqrt{2\pi} \cdot \exp\{-[(x-\mu)/\sigma]^2/2\} \quad (D1-1)$$

gdzie  $(\mu, \sigma)$  są parametrami tego rozkładu, przy czym:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x h(x) dx \quad (D1-2)$$

jest wartością średnią, natomiast:

$$\sigma = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 h(x) dx \right]^{1/2} \quad (D1-3)$$

- odchyleniem standardowym rozkładu zmiennej  $x$ .

Dystrybuanta tego rozkładu jest określona wzorem:

$$D(x) = D(x; \mu, \sigma) = \int_{-\infty}^x h(x') dx' \quad (D1-4)$$

przy czym, dla uniknięcia niejednoznaczności, zastosowano zmianę oznaczeń zmiennych przez podstawienie:  $x' = x$ , a więc  $h(x')$  jest określone wzorem (D1-1).

### D1.2. Standaryzowany rozkład normalny

Gęstość zmiennej standaryzowanej:

$$y = (x-\mu)/\sigma \quad (D1-5)$$

jest związana z gęstością zmiennej  $x$  zależnością:

$$\varphi(y) = h(x(y)) \cdot |dx/dy| \quad (D1-6)$$

Ponieważ:

$$x(y) = \mu + \sigma \cdot y \quad (D1-7)$$

oraz:

$$dx/dy = \sigma \quad (D1-8)$$

więc gęstość standaryzowanego rozkładu normalnego wynosi:

$$\varphi(y) = 1/\sqrt{2\pi} \cdot \exp(-y^2/2) \quad (D1-9)$$

a jego dystrybuanta:

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \int_{-\infty}^y \varphi(y') dy' = \int_{-\infty}^x 1/\sigma\sqrt{2\pi} \cdot \exp(-[(x'-\mu)/\sigma]^2/2) dx' = \\ &= \int_{-\infty}^x h(x') dx' = D(x; \mu, \sigma) \end{aligned} \quad (D1-10)$$

Dystrybuanta jest ściśle monotoniczną (rosnącą) funkcją argumentu, a więc istnieje funkcja odwrotna (tzw. antydystrybuanta), która dla zmiennej standaryzowanej wynosi:

$$y = \Phi^{-1}(r) \quad (D1-11)$$

gdzie:

$$r = \int_{-\infty}^y \varphi(y') dy' \quad (D1-12)$$

Wartość występującej we wzorze (D1-11) zmiennej  $y$  nazywamy kwantylem rzędu  $r$  standaryzowanego rozkładu normalnego, natomiast odpowiadającą wartość zmiennej:

$$x = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(r) \quad (D1-13)$$

- kwantylem rzędu  $r$  rozkładu normalnego o parametrach  $(\mu, \sigma)$ .

### D1.3. Siatka laplaso-regularna

Siatkę funkcyjną rozkładu normalnego o dystrybuancie  $D(x; \mu, \sigma)$  (albo krócej: siatką laplaso-regularną) nazwano układ współrzędnych ortogonalnych o liniowych skalach: odciętych  $X$  i rzędnych  $Y$ , w których wykres każdej dystrybuanty  $D(x)$  rozkładu normalnego jest linią prostą o równaniu:

$$Y = (X - \mu) / \sigma \quad (D1-14)$$

W celu uzyskania transformacji krzywoliniowej funkcji  $D(x; \mu, \sigma)$  w prostą określoną równaniem (D1-14) zastosowano anamorficzne przekształcenie skal, a mianowicie odciętej:

$$X = x \quad (D1-15)$$

oraz rzędnej:

$$Y = \Phi^{-1}(r) \quad (D1-16)$$

przy czym na skali rzędnych są nanoszone wartości dystrybuanty:

$$r = \Phi(Y) \quad (D1-17)$$

Siatkę laplaso-regularną przedstawiono na rys.1, który również ilustruje graficzną metodę szacowania parametrów  $(\mu, \sigma)$  rozkładu z wykresu dystrybuanty  $D(x; \mu, \sigma)$  \*).

Metoda ta jest oparta na odwróceniu następujących związków:

1) - gdy  $X = \mu$  to  $Y = 0$ , a wówczas:

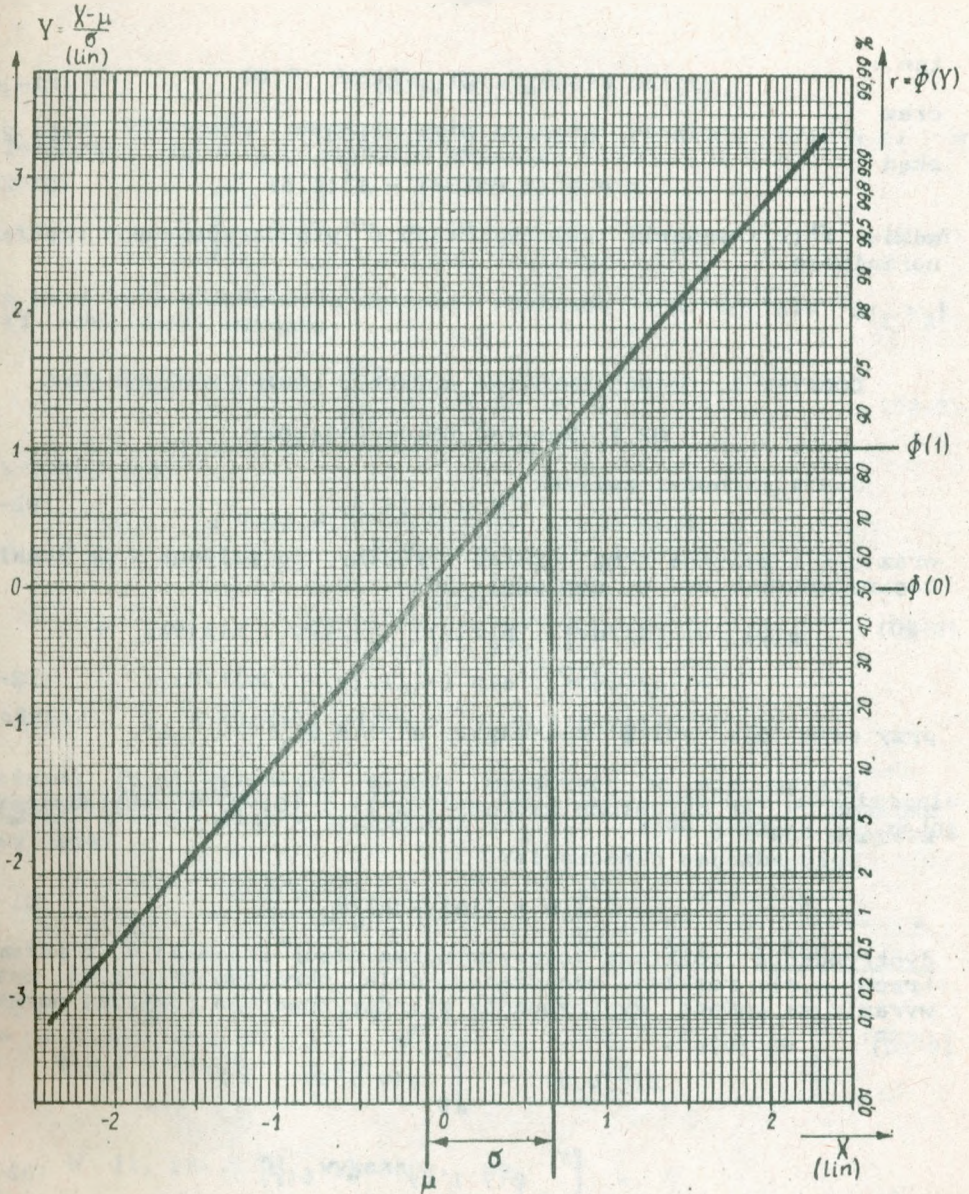
$$D(\mu) = \Phi(0) = 0,5 \quad (D1-18)$$

2) - gdy  $X = \mu + \sigma$  to  $Y = 1$ , a wówczas:

$$D(\mu + \sigma) = \Phi(1) = 0,84134... \quad (D1-19)$$

Przy danym wykresie \*) dystrybuanty  $D(x)$  rozkładu normalnego powyższe związki umożliwiają wyznaczenie z rysunku ocen parametrów  $(\mu, \sigma)$  tego rozkładu na podstawie zależności odwrotnych,

\*) Dokładny opis metody podano w [8, pkt.6.7].



Rys.1. Siatka laplaso-regularna

Na rysunku przedstawiono ideę graficznej metody szacowania wartości parametrów  $(\mu, \sigma)$  rozkładu normalnego zmiennej  $x = \ln(f/f_0)$ . Linia prosta aproksymuje empiryczną dystrybuantę rozkładu wagi. Szczegółowy opis metody podano w [8, pkt.6.7].

tzn.:

$$\mu = \Phi^{-1}(0,5) \quad (D1-20)$$

oraz

$$\mu + \sigma \approx \Phi^{-1}(0,84134) \quad (D1-21)$$

skąd

$$\sigma \approx \Phi^{-1}(0,84134) - \Phi^{-1}(0,5) \quad (D1-22)$$

gdzie  $\Phi^{-1}(r)$  oznacza kwantyl rzędu  $r$  standaryzowanego rozkładu normalnego.

## DODATEK 2. CHARAKTERYSTYKA ROZKŁADU LOGARYTMONORMALNEGO

### D2.1. Rozkład nieograniczony

Jeśli zachodzi związek:

$$x = \ln(v) \quad (D2-1)$$

oraz jeśli zmienna  $x$  ma rozkład normalny, to zmienna  $v$  ma rozkład logarytmnormalny o gęstości (dla  $v > 0$ ):

$$\begin{aligned} g(v) &= |dx/dv| \cdot h(x(v)) = 1/v \cdot h(x(v)) = \\ &= 1/v\sigma\sqrt{2\pi} \cdot \exp\{-[(\ln(v)-\mu)/\sigma]^2/2\} \end{aligned} \quad (D2-2)$$

przy czym dla  $v \leq 0$  zachodzi:  $g(v) = 0$ .

Występujące w powyższym wzorze parametry  $(\mu, \sigma)$  rozkładu zmiennej  $v$  są określone wzorami (D1-2) i (D1-3) z uwzględnieniem związku (D2-1).

Wprowadzając oznaczenie:

$$y = [\ln(v)-\mu]/\sigma \quad (D1-3)$$

dystrybuante rozkładu logarytmnormalnego zmiennej  $v$  o parametrach  $(\mu, \sigma)$ , rozkładu oznaczanego dalej skrótowo  $LN(v; \mu, \sigma)$ , można wyrazić za pomocą dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego:

$$\begin{aligned} D(v; \mu, \sigma) &= \int_0^v g(v') dv' = \\ &= \int_{-\infty}^y \phi(y') dy' = \Phi(y) \end{aligned} \quad (D2-4)$$

Momenty zwykłe rozkładu  $LN(v; \mu, \sigma)$  wynoszą [1, pkt.2.2]:

$$M_{\omega r} = \int_0^{\infty} v^r g(v) dv = \exp(r\mu + r^2\sigma^2/2) \quad (D2-5)$$

gdzie  $r$  jest rzędem momentu.



## D2.2. Rozkład dwustronnie ucięty

W przypadku obustronnego ucięcia rozkładu  $LN(v; \mu, \sigma)$  w punktach:  $v_1$  i  $v_2$  zachodzi związek:

$$\int_{v_1}^{v_2} g(v) dv = D(v_2; \mu, \sigma) - D(v_1; \mu, \sigma) \quad (D2-6)$$

a więc dla unormowania gęstości rozkładu w przedziale  $[v_1, v_2]$ , tj. spełnienia warunku:

$$\int_{v_1}^{v_2} g'(v) dv = 1 \quad (D2-7)$$

trzeba, aby:

$$g'(v) = \frac{g(v)}{D(v_2; \mu, \sigma) - D(v_1; \mu, \sigma)} = \frac{g(v)}{\Phi(y_2) - \Phi(y_1)} \quad (D2-8)$$

gdzie:  $y_1 = [\ln(v_1) - \mu] / \sigma$ ;  $y_2 = [\ln(v_2) - \mu] / \sigma$ .

W przypadku, gdy rozkład  $LN(v; \mu, \sigma)$  zostaje obustronnie ucięty i unormowany w przedziale  $[v_1, v_2]$ , jego momenty zwykajne wynoszą:

$$M_r(v_1, v_2) = \int_{v_1}^{v_2} v^r g'(v) dv = \int_{v_1}^{v_2} \frac{v^r g(v) dv}{\Phi(y_2) - \Phi(y_1)} = \frac{1}{\Phi(y_2) - \Phi(y_1)} \left[ \int_0^{v_2} v^r g(v) dv - \int_0^{v_1} v^r g(v) dv \right] \quad (D2-9)$$

W [1, pkt.2.5] wykazano, że:

$$\frac{\int_0^{v_2} v^r g_0(v) dv}{\int_0^{\infty} v^r g_0(v) dv} =$$

$$\frac{\int_0^{v_z} \exp\{\ln(v) \cdot r\} \cdot 1/(v\sigma\sqrt{2\pi}) \cdot \exp\{-[(\ln(v)-\mu)/\sigma]^2/2\} dv}{\exp(r\mu + (r\sigma)^2/2)}$$

$$- \int_0^{v_z} 1/(v\sigma\sqrt{2\pi}) \cdot \exp(r \cdot \ln(v) - r \cdot \mu - (r\sigma)^2/2 - [(\ln(v)-\mu)/\sigma]^2/2) dv =$$

$$- \int_0^{v_z} 1/(v\sigma\sqrt{2\pi}) \cdot \exp\{-[(\ln(v)-\mu-r\sigma^2)/\sigma]^2/2\} dv =$$

$$- \int_0^{v_z} g_0(v; \mu+r\sigma^2, \sigma) dv = D(v_z; \mu+r\sigma^2, \sigma) \quad (D2-10)$$

Ponieważ zachodzi związek:

$$D(v_z; \mu+r\sigma^2, \sigma) = \Phi([\ln(v_z) - (\mu+r\sigma^2)]/\sigma) =$$

$$= \Phi([\ln(v_z) - \mu]/\sigma - r\sigma) = \Phi(y_z - r\sigma) \quad (D2-11)$$

więc:

$$\int_0^{v_z} v^r g(v) dv = M_{or} \cdot \Phi(y_z - r\sigma) \quad (D2-12)$$

Uwzględniając (D2-12) w (D2-9) mamy momenty zwyczajne rozkładu LN(v; μ, σ) obustronnie uciętego i unormowanego w przedziale [v<sub>1</sub>, v<sub>2</sub>]:

$$M_r(v_1, v_2) = \frac{\Phi(y_2 - r\sigma) - \Phi(y_1 - r\sigma)}{\Phi(y_2) - \Phi(y_1)} \cdot M_{or} \quad (D2-13)$$

gdzie M<sub>or</sub> jest określone wzorem (D2-5).

### D2.3. Rozkład zmiennej f

Jeśli zachodzi związek:

$$v = f/f_0 \quad (D2-14)$$

gdzie f = const. oraz jeśli zmienna v ma rozkład logarytmnormalny, to zmienna f też ma rozkład logarytmnormalny o gęstości (dla f > 0):

$$g(f) = |dv/df| \cdot h(v(f)) = 1/f_0 \cdot h(v(f)) = \\ = 1/f_0 \sqrt{2\pi} \cdot \exp \{-[(\ln(f/f_0) - \mu)/\sigma]^2 / 2\} \quad (D2-15)$$

przy czym dla  $f \leq 0$  zachodzi:  $g(f) = 0$

Dystrybuanta rozkładu  $LN(f; \mu, \sigma)$  wynosi:

$$D(f; \mu, \sigma) = \int_0^f g(f') df' = \Phi(y) \quad (D2-16)$$

gdzie:

$$y = [\ln(f/f_0) - \mu] / \sigma \quad (D2-17)$$

Momenty zwyczajne rzędu  $r$  nieograniczonego rozkładu  $LN(f; \mu, \sigma)$  wynoszą:

$$m_{\omega r} = \int_0^{\infty} f^r g(f) df = \int_0^{\infty} (f_0 v)^r (1/f_0) g(v) f_0 dv = \\ = f_0^r \cdot \int_0^{\infty} v^r g(v) dv = f_0^r \cdot \exp(r\mu + r^2 \sigma^2 / 2) \quad (D2-18)$$

Gęstość rozkładu  $LN(f; \mu, \sigma)$ , po dwustronnym ucięciu i unormowaniu w przedziale  $[f_d, f_g]$  wynosi:

$$g'(f) = g(f) / [\Phi(y_g) - \Phi(y_d)] \quad (D2-19)$$

gdzie:

$$y_g = [\ln(f_g/f_0) - \mu] / \sigma \quad (D2-20)$$

oraz:

$$y_d = [\ln(f_d/f_0) - \mu] / \sigma \quad (D2-21)$$

Momenty zwyczajne rzędu  $r$  rozkładu  $LN(f; \mu, \sigma)$ , dwustronnie uciętego i unormowanego w przedziale  $[f_d, f_g]$  wynoszą:

$$m_r(f_d, f_g) = \frac{\Phi(y_g - r\sigma) - \Phi(y_d - r\sigma)}{\Phi(y_g) - \Phi(y_d)} \cdot m_{\omega r} \quad (D2-22)$$

gdzie  $m_{\omega r}$  jest określone wzorem (D2-18).

DODATEK 3. WRAZLIWOSC I EFEKTYWNOŚĆ PUNKTOWYCH APROKSYMAT  
 TŁUMIENNOŚCI GŁOŚNOŚCI  $L_m$

D3.1. Wrażliwość

Wrażliwość  $W_m$  punktowej aproksymaty tłumienności głośności  $L_m$  określono w pkt. 3.1 referatu jako:

$$W_m = \left[ \frac{V(\dot{L}_m)}{V(\dot{A}_k)} \right]^2 = \frac{\beta_L}{\beta} \quad (D3-1)$$

gdzie:  $\beta_L$  jest błędem standardowym określonej wzorem (1-3) aproksymaty, a  $\beta$  - błędem standardowym wyznaczania tłumienności punktowych  $\dot{A}_k$  (gdzie  $k=1, \dots, p$ ).

Jak wykazano w [15]:

$$V(\dot{L}_m) \approx \beta^2 \cdot \frac{\sum (G_k \cdot \dot{Y}_k)^2}{(\sum G_k \cdot \dot{Y}_k)^2} \quad (D3-2)$$

przy czym sumowanie zachodzi w zakresie  $k = 1, \dots, p$ , natomiast:

$$\dot{Y}_k = 10^{-\frac{D_k \cdot m}{10}} \quad (D3-3)$$

gdzie symbol  $D_k = \dot{A}_k - \dot{A}_0$  oznacza oszacowanie zniekształcenia tłumieniowego rozważanego czwornika, występującego dla częstotliwości  $f_k$  względem częstotliwości odniesienia  $f_0$ .

Wrażliwość  $p$ -punktowej aproksymaty tłumienności głośności  $L_m$  można zatem wyrazić przybliżo m wzorem:

$$W_m \approx \frac{(\sum (G_k \cdot \dot{Y}_k)^2)^2}{\sum G_k \cdot \dot{Y}_k} \quad (D3-4)$$

przy czym sumowanie zachodzi w zakresie  $k = 1, \dots, p$ , natomiast  $\dot{Y}_k$  jest określone wzorem (D3-3).

Wrażliwość  $W_m$  osiąga wartość minimalną wówczas, gdy wszystkie współczynniki wagowe są jednakowe, tzn. równe:  $G_k = 1/p$ , przy czym, ponieważ nigdy nie jest spełniony warunek:  $D_k = 0$ , więc:

$$\min \{W_m\} \approx \frac{(\sum (\dot{Y}_k)^2)^2}{\sum \dot{Y}_k} > 1/\sqrt{p} \quad (D3-5)$$

## D3.2. Efektywność

W pkt 3.2 referatu wykazano, że efektywność  $e_m$  p-punktowej aproksymaty tłumienności głośności  $L_m$  jest związana z wrażliwością  $W_m$  tej aproksymaty zależnością:

$$e_m = 1/(p \cdot W_m^2) \quad (D3-6)$$

Podstawiając (D3-4) do (D3-6) otrzymamy:

$$e_m = \frac{(\sum G_k \cdot \dot{Y}_k)^2}{p \cdot \sum (G_k \cdot \dot{Y}_k)^2} \quad (D3-7)$$

przy czym sumowanie zachodzi w zakresie  $k = 1, \dots, p$ .

Jak to wynika z pkt 3.2 referatu, maksymalną wartość efektywności:  $e_m = 1$  punktowych aproksymat tłumienności pasmowej  $L_m$  uzyskuje się wówczas, gdy wartości wszystkich współczynników wagowych  $G_k$  są jednakowe, tzn. gdy określona wzorem (3-3) wielkość:

$$S^2 = \sum_{k=1}^p (G_k - 1/p)^2 \quad (D3-8)$$

jest równa zero. Gdy suma kwadratów  $S^2$  rośnie, efektywność  $e_m$  maleje. Minimalną wartość efektywności:  $e_m = 0$  uzyskuje się wtedy, gdy wielkość  $S^2$  dąży do nieskończoności.

Identyczny wpływ ma wielkość  $S^2$  na efektywność  $e_m$  punktowych aproksymat tłumienności głośności  $L_m$ , jednakże w tym przypadku maksymalna wartość efektywności (występująca wówczas, gdy jest spełniony warunek:  $S^2 = 0$ , tzn. gdy:  $G_k = 1/p$ ) wynosi:

$$\max \{e_m\} = \frac{(\sum \dot{Y}_k)^2}{p \cdot \sum \dot{Y}_k^2} < 1 \quad (D3-9)$$

przy czym sumowanie zachodzi w zakresie  $k = 1, \dots, p$ .

BIBLIOTEKA  
Instytutu Łączności  
5-10055

Biblioteca  
IL

S-10055