Z-4

INSTYTUT ŁĄCZNOŚCI

REFERATY PROBLEMOWE

Zeszyt 5

Romuald Białobrzeski, Jerzy Dudziewicz

MINIMALNA CZĘSTOŚĆ PRÓBKOWANIA SYGNAŁU LOSOWEGO PRZY POMIARZE JEGO MOCY ŚREDNIEJ

Warszawa - marzec 1978

I N S T Y T U T   Ł Ą C Z N O Ś C I

Na prawach rękopisu

R E F E R A T Y   P R O B L E M O W E

Zeszyt 5

Romuald Białobrzeski, Jerzy Dudziewicz

MINIMALNA CZĘSTOŚĆ PROBKOWANIA SYGNAŁU LOSOWEGO PRZY POMIARZE JEGO MOCY SREDNIEJ

Warszawa - marzec 1978

Opracowali:

Prof. dr inż. Jerzy Dudziewicz

Dr inż. Romuald Białobrzeski

/Z-12/

Uzupełnienie do sprawozdania z realizacji pracy
nr 19.04.A.02.02

Instytut Łączności

04-894 Warszawa, ul. Szachowa 1, tel. 128

Maszynopis złożono dnia 1.03.1978 r.

Omówiono zagadnienia związane z wyznaczaniem minimalnej częstości próbkowania sygnału losowego przy pomiarze jego mocy średniej. Wyznaczono wartości współczynnika zmienności dla sygnałów o różnych rozkładach poddanych operacji podnoszenia do kwadratu.

Redaktor: J. Borkowska   Montaż tekstu: B. Drabik

Wpłynęło do Działu Wydawniczego Instytutu Łączności
dnia 3.03.1978 r.

Nakład 50 egz.

SPIS TRESCI

Romuald Białobrzeski
Jerzy Dudziewicz

MINIMALNA CZĘSTOŚĆ PRÓBKOWANIA SYGNAŁU LOSOWEGO PRZY POMIARZE JEGO MOCY ŚREDNIEJ

1. WSTĘP

Dla cyfrowego miernika mocy średniej sygnałów losowych pracującego na zasadzie próbkowania bardzo istotna jest sprawa wyznaczenia częstości próbkowania mierzonego sygnału losowego. Chodzi mianowicie o to, aby częstość próbkowania sygnału mogła być jak najmniejsza. Należy zatem wyznaczyć minimalną liczność próby n , jaką należy "pobrać" z sygnału, aby z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż P można było stwierdzić, że wyznaczona przez miernik wartość mocy średniej będzie się różniła od wartości rzeczywistej mniej niż o ε .

2. ANALIZA ZAGADNIENIA

Niech będzie dany sygnał losowy będący realizacją procesu losowego stacjonarnego i ergodycznego w węższym sensie. Sygnał ten dołączony do wejścia miernika mocy średniej jest próbkowany z częstością f , a zatem w ciągu 1 s zostanie pobranych $n = f$ próbek o losowo zmieniającej się amplitudzie. Zakłada się przy tym, że czas trwania próbki /jej szerokość/ jest do pominięcia względem okresu próbkowania i że próba jest prosta.

Na podstawie dokonanych założeń przyjmujemy, że dany ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wartości napięć chwilowych sygnału /po próbkowaniu/ jest realizacją ciągu zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Interesującą nas zmienną losową - estymator mocy średniej sygnału za określony przedział czasu - oznaczymy przez:

$$Y_n = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}{n} \qquad /1/$$

Wobec tego wartość oczekiwana tej zmiennej wynosi

$$E/Y_n/ = \frac{E/X_1^2/ + E/X_2^2/ + \ldots + E/X_n^2/}{n} \qquad /2/$$

Korzystając z nierówności Czebyszewa [2] można napisać:

$$Pr\left\{\left|Y_n - E/Y_n/\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{D^2/Y_n/}{\varepsilon^2} \qquad /3/$$

lub

$$Pr\left\{\left|Y_n - E/Y_n/\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \frac{D^2/Y_n/}{\varepsilon^2} \qquad /4/$$

przy czym wariancja

$$D^2/Y_n/ = D^2\left/\frac{X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2}{n}\right/ = \frac{D^2/X_1^2/+D^2/X_2^2/+\ldots D^2/X_n^2/}{n^2} \qquad /5/$$

Załóżmy dalej, że

$$D^2/X_1^2/ \leqslant C^2,\ D^2/X_2^2/ \leqslant C^2, \ldots, D^2/X_n^2/ \leqslant C^2 \qquad /6/$$

Wobec tego na podstawie równania /5/ i zależności /6/ można napisać:

$$D^2/Y_n/ \leqslant \frac{nC^2}{n^2} = \frac{C^2}{n} \qquad /7/$$

Z zależności /4/ wynika więc, że

$$Pr\left\{\left|Y_n - E/Y_n/\right| < \mathcal{E}\right\} > 1 - \frac{D^2/Y_n/}{\mathcal{E}^2} \geqslant 1 - \frac{C^2}{\mathcal{E}^2 n} \qquad /8/$$

Chodzi teraz o to, aby graniczna wartość wyrażenia $1 - \frac{C^2}{\mathcal{E}^2 n}$ była nie mniejsza niż zadana wartość prawdopodobieństwa P, że błąd pomiaru mocy średniej nie przekroczy $\mathcal{E}$, to znaczy ma obowiązywać zależność:

$$1 - \frac{C^2}{n\mathcal{E}^2} \geqslant P \qquad /9/$$

skąd

$$n \geqslant \frac{C^2}{\mathcal{E}^2\left[1 - P\right]} \qquad /10/$$

Ponieważ $E/Y_n/$ można utożsamiać z mierzoną mocą średnią sygnału, można więc formalnie zapisać:

$$n \geqslant \frac{\dfrac{C^2}{E^2/Y_n/}}{\left[\dfrac{\mathcal{E}}{E/Y_n/}\right]^2 \left[1-P\right]} \qquad /11/$$

gdzie $\Delta = \frac{\mathcal{E}}{E/Y_n/}$ oznacza względny /dopuszczalny/ błąd pomiaru mocy średniej, a wielkość $v = \frac{C}{E/Y_n/}$ można traktować jako "graniczny" współczynnik zmienności zmiennej losowej Y_n.

Można zatem wyznaczyć częstość powtarzania impulsów próbkujących f dla danej wartości czasu uśredniania /pomiaru/ T [s] z zależności:

$$f = \frac{n}{T} \geq \frac{v^2}{\Delta^2 [1-P] T} \qquad /12/$$

Wartość współczynnika zmienności zależy od typu rozkładu zmiennej losowej X, przy czym przy założeniu ścisłej stacjonarności i ergodyczności badanego procesu losowego wszystkie zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mają ten sam rozkład.
Znając rozkład tej zmiennej losowej X można łatwo wyznaczyć rozkład zmiennej losowej Y . Wystarczy zauważyć, że kwadratowanie odpowiada przekształceniu określonemu funkcją:

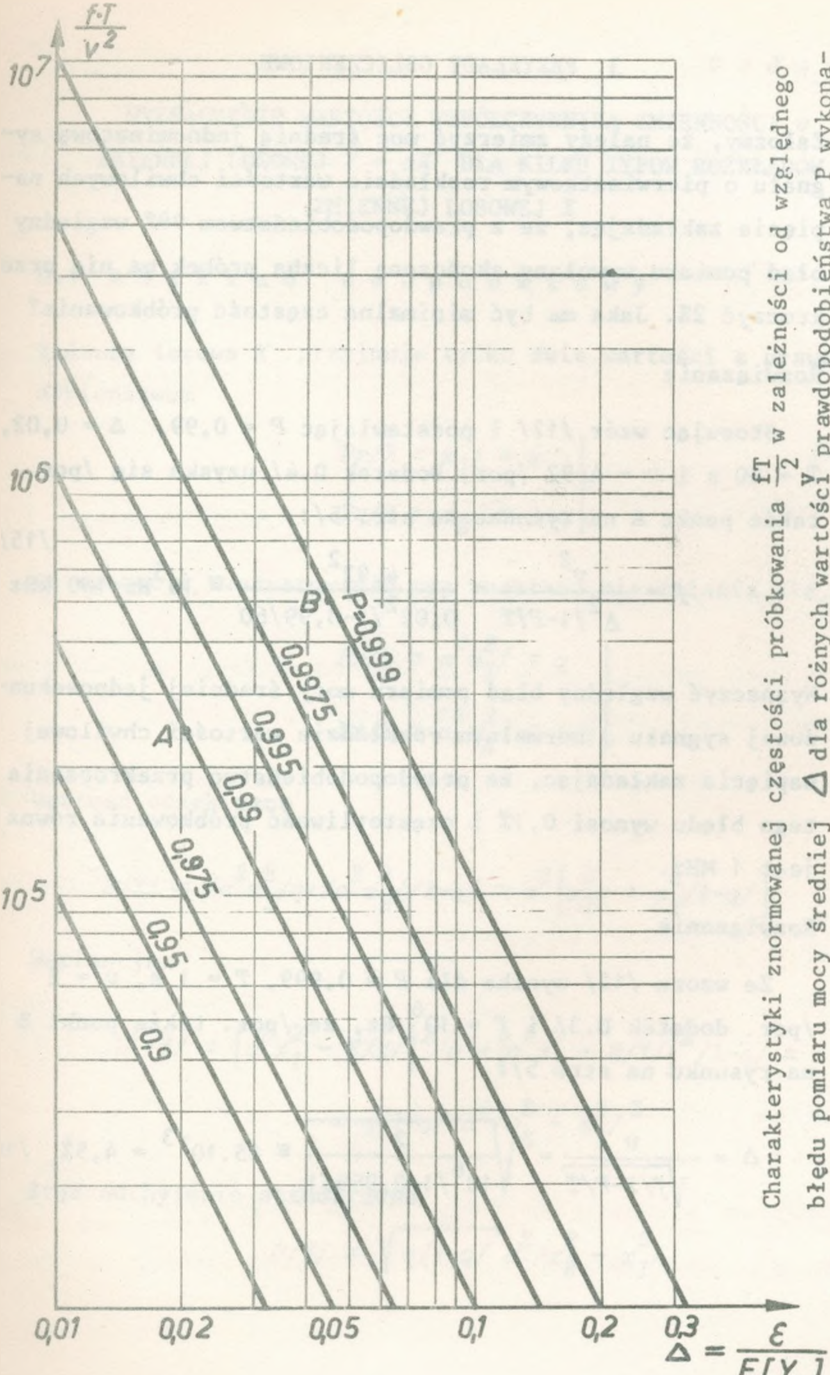
$$Y = a^2 X^2 \qquad /13/$$

Jeżeli $y < 0$, to równanie $y=a^2x^2$ nie ma rozwiązań rzeczywistych, a zatem gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y, a mianowicie $\varphi/y/ = 0$. Dla $y > 0$ gęstość ta jest równa [2]

$$\varphi/y/ = \frac{f/\frac{\sqrt{y}}{a}/ - f/-\frac{\sqrt{y}}{a}/}{2\, a \sqrt{y}} \qquad /14/$$

gdzie: $f/x/$- gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej X
/przed operacją "kwadratowania"/

Na rysunku na str. 5 przedstawiono charakterystyki "znormowanej" częstości próbkowania $\frac{fT}{v^2}$ w zależności od dopuszczalnego błędu względnego pomiaru mocy średniej $\Delta = \frac{\varepsilon}{E[Y_n]}$ przy parametrze P reprezentującym prawdopodobieństwo wykonania "poprawnego" pomiaru.



Charakterystyki znormowanej częstości próbkowania $\frac{fT}{V^2}$ w zależności od względnego błędu pomiaru mocy średniej Δ dla różnych wartości prawdopodobieństwa P wykonania poprawnego pomiaru

3. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

A. Załóżmy, że należy zmierzyć moc średnią jednominutową sygnału o pierwiastkowym rozkładzie wartości chwilowych napięcia zakładając, że z prawdopodobieństwem 99% względny błąd pomiaru wywołany skończoną liczbą próbek ma nie przekroczyć 2%. Jaka ma być minimalna częstość próbkowania?

Rozwiązanie

Stosując wzór /12/ i podstawiając $P = 0,99$, $\Delta = 0,02$, $T = 60$ s i $v = 4,92$ /por. Dodatek D.4/ uzyska się /por. także punkt A na rysunku na str. 5/:

$$f = \frac{v^2}{\Delta^2/1-P/T} = \frac{4,92^2}{0,02^2/1-0,99/60} \cong 10^5\,\mathrm{Hz} = 100\ \mathrm{kHz} \qquad /15/$$

B. Wyznaczyć względny błąd pomiaru mocy średniej jednosekundowej sygnału o normalnym rozkładzie wartości chwilowej napięcia zakładając, że prawdopodobieństwo przekroczenia tego błędu wynosi 0,1% i częstotliwość próbkowania równa jest 1 MHz.

Rozwiązanie

Ze wzoru /12/ wynika dla $P = 0,999$, $T = 1$ s, $v = 2$ /por. dodatek D.3/ i $f = 10^6$ Hz, że /por. także punkt B na rysunku na str. 5/:

$$\Delta = \frac{v}{\sqrt{f/1-P/T}} = \sqrt{\frac{2}{10^6/1-0,999/1}} \cong 45.10^{-3} = 4,5\% \qquad /16/$$

Dodatek

WYZNACZENIE WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKA ZMIENNOŚCI v ZMIENNEJ LOSOWEJ $Y = aX^2$ DLA KILKU TYPOW ROZKŁADOW ZMIENNEJ LOSOWEJ X

D.1. Rozkład dwupunktowy

Zmienna losowa X przyjmuje tylko dwie wartości z prawdopodobieństwem

$$\left.\begin{aligned} Pr/X = x_1/ &= q \\ Pr/X = x_2/ &= 1-q \end{aligned}\right\} \qquad /D-1/$$

Po operacji kwadratowania typ rozkładu nie zmienia się, gdyż

$$\left.\begin{aligned} Pr/Y = a^2x_1^2/ &= q \\ Pr/Y = a^2x_2^2/ &= 1-q \end{aligned}\right\} \qquad /D-2/$$

Wartość oczekiwana

$$E/Y/ = /a^2x_1^2/q+/a^2x_2^2//1-q/ = a^2\left[x_1^2q + x_2^2/1-q/\right] \qquad /D-3/$$

Wariancja:

$$\begin{aligned} D^2/Y/ &= \left[a^2x_1^2 - E/Y/\right]^2 q + \left[a^2x_2^2 - E/Y/\right]^2/1-q/ = \\ &= q/1-q/\ a^4/x_2^2 - x_1^2/^2 \end{aligned} \qquad /D-4/$$

Stąd odchylenie standardowe

$$D/Y/ = \sqrt{q/1-q/}\ a^2/x_2^2 - x_1^2/ \qquad /D-5/$$

Zatem współczynnik zmienności zmiennej losowej Y wynosi:

$$v = \frac{D/Y/}{E/Y/} = \frac{\sqrt{q/1-q/}\,/x_2^2 - x_1^2/}{x_1^2 q + x_2^2/1-q/} \qquad /D-6/$$

W szczególności dla $q = \frac{1}{2}$

$$v = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2^2 + x_1^2} \qquad /D-7/$$

Jeżeli poza tym $\frac{x_2}{x_1} \to \infty$, to $v \to 1$.

D.2. R o z k ł a d j e d n o s t a j n y

Niech zmienna losowa X ma rozkład, którego gęstość prawdopodobieństwa można przedstawić jako $/d$ = const/

$$f/x/ = \frac{1}{2d} \qquad /D-8/$$

Po operacji kwadratowania gęstość prawdopodobieństwa zmiennej Y zgodnie z /14/ wynosi

$$\varphi/y/ = \frac{1}{2ad\sqrt{y}} \qquad /D-9/$$

Wartość oczekiwana zmiennej Y

$$E/Y/ = \int_{-\infty}^{\infty} y\,\varphi/y/\,dy = \frac{1}{2ad}\int_{0}^{/ad/^2} y^{1/2}\,dy = \frac{/ad/^2}{3} \qquad /D-10/$$

Wariancja zmiennej Y

$$D^2/Y/ = \int_{-\infty}^{\infty} \left[y - E/Y/\right]^2 \varphi/y/\, dy = \frac{1}{2ad} \int_0^{/ad/^2} \left[y - \frac{/ad/^2}{3}\right]^2 \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy =$$

$$= \frac{4}{45} /ad/^4 \qquad /D-11/$$

Zatem odchylenie standardowe

$$D/Y/ = \frac{2}{\sqrt{45}} /ad/^2 \qquad /D-12/$$

A więc współczynnik zmienności

$$v = \frac{D/Y/}{E/Y/} = \frac{2/ad/^2}{\sqrt{45}} \cdot \frac{3}{/ad/^2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cong 0,8944 \qquad /D-13/$$

D.3. Rozkład normalny

Dla rozkładu normalnego, gęstość prawdopodobieństwa można przedstawić w postaci:

$$f/x/ = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad /D-14/$$

Na podstawie /14/ dla $y > 0$ otrzymuje się:

$$\varphi/y/ = \frac{e^{-\frac{y}{2\sigma^2 a^2}} + e^{-\frac{y}{2\sigma^2 a^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}\; 2a\sqrt{y}} = \frac{e^{-\frac{y}{2\sigma^2 a^2}}}{a\sigma\sqrt{2\pi}\sqrt{y}} \qquad /D-15/$$

Jest to gęstość prawdopodobieństwa rozkładu gamma o postaci

$$\varphi/y/ = \frac{c^{d}}{\Gamma/d/} \, y^{d-1} \, e^{-cy} \qquad /D\text{-}16/$$

gdzie:

$$c = \frac{1}{2\sigma^{2}a^{2}} \qquad /D\text{-}17/$$

$$d = \frac{1}{2} \qquad /D\text{-}18/$$

Wartość oczekiwana takiej zmiennej losowej wynosi [2]

$$E/Y/ = \frac{d}{c} \qquad /D\text{-}19/$$

a odchylenie standardowe

$$D/Y/ = \frac{\sqrt{d}}{c} \qquad /D\text{-}20/$$

Zatem współczynnik zmienności

$$v = \frac{D/Y/}{E/Y/} = \frac{\frac{\sqrt{d}}{c}}{\frac{d}{c}} = \frac{1}{\sqrt{d}} = \sqrt{2} \qquad /D\text{-}21/$$

D.4. Rozkład pierwiastkowy

Dla rozkładu pierwiastkowego gęstość prawdopodobieństwa można przedstawić w postaci:

$$f/x/ = A\, e^{-2\sqrt{A}\sqrt{x}} \qquad /D\text{-}22/$$

Na podstawie /14/ dla $y > 0$ otrzymuje się:

$$\varphi/y/ = \frac{A}{a}\,\frac{e^{-2\sqrt{\frac{A}{a}}\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} \qquad /D-23/$$

Wartość oczekiwana tej zmiennej losowej

$$E/Y/ = \frac{A}{a}\int_0^{\infty}\sqrt{y}\,e^{-2\sqrt{\frac{A}{a}}\sqrt[4]{y}}\,dy = \frac{15}{2}\,\frac{a^2}{A^2} \qquad /D-24/$$

a odchylenie standardowe:

$$D/Y/ = \sqrt{\frac{A}{a}\int_0^{\infty} y^2\,\frac{e^{-2\sqrt{\frac{A}{a}}\sqrt[4]{y}}}{\sqrt{y}}\,dy - E^2/Y/} = \frac{33\sqrt{5}\,a^2}{2A^2} \qquad /D-25/$$

Zatem współczynnik zmienności zmiennej losowej Y wynosi:

$$v = \frac{D/Y/}{E/Y/} = \frac{33\sqrt{5}}{15} \approx 4,92 \qquad /D-26/$$

D.5. Sygnał sinusoidalny

Sygnał harmoniczny /np. sinusoidalny/- o stałej amplitudzie X i stałej częstotliwości f_0 można rozpatrywać jako zmienną losową, jeżeli faza początkowa $\theta = \theta/k/$ jest zmienną losową. Jeżeli na przykład faza $\theta/k/$ ma jednostajną gęstość prawdopodobieństwa, to gęstość prawdopodobieństwa sygnału harmonicznego można przedstawić za pomocą zależności:

$$f/x/ = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} & \text{dla } |x| < A \\ 0 & \text{dla } |x| > A \end{cases} \qquad /D-27/$$

Na podstawie zależności /14/ dla $y > 0$ otrzymuje się:

$$\varphi/y/ = \frac{1}{\pi\sqrt{y}\sqrt{a^2A^2 - y}} \qquad /D\text{-}28/$$

Wartość oczekiwana tej zmiennej losowej:

$$E/Y/ = \frac{1}{\pi}\int_0^{a^2A^2} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{a^2A^2 - y}}\, dy = \frac{a^2A^2}{2} \qquad /D\text{-}29/$$

Odchylenie standardowe:

$$D/Y/ = \sqrt{D^2/Y/} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\left[y - E/Y/\right]^2 \varphi/y/\, dy} = \frac{a^2A^2}{2\sqrt{2}} \qquad /D\text{-}30/$$

Zatem współczynnik zmienności zmiennej losowej Y wynosi:

$$v = \frac{D/Y/}{E/Y/} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707. \qquad /D\text{-}31/$$

WYKAZ LITERATURY

1. Dudziewicz J., Białobrzeski R.: Błędy kwantyzacji miernika mocy średniej sygnałów losowych. Prace Instytutu Łączności nr 84.

2. Fisz M.: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN Warszawa 1969.

D o t y c h c z a s   u k a z a ł y   s i ę :

1. Białobrzeski R., Sońta S.: Zastosowanie testu chi kwadrat Pearsona do weryfikacji hipotezy statystycznej na podstawie empirycznej gęstości prawdopodobieństwa. Grudzień 1977.

2. Blińkiewicz A., Mędrzycki B., Hutnik M., Sambierski R.: Zastosowanie pamięci kasetowej PK-1 do rejestracji danych w systemie komutacyjnym E-10. Styczeń 1978.

3. Orłowski A.: Optymalizacja układu ogranicznika dynamiki zwłaszcza dla radiofonii krótkofalowej. Luty 1978.

4. Frączek K.: Zasady opracowywania wymagań techniczno-eksploatacyjnych na urządzenia pomiarowe w resorcie łączności. Marzec 1978.